TP 11

Exercice 1. evaluation numérique d'une dérivée

On sait que si une fonction f est dérivable en x_0 on a $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ avec

$$\left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \leq M_2 \frac{h}{2}$$

si f est deux fois dérivable au voisinage de x_0.
Ecrire une fonction prenant en entrée f, x_0, h et renvoyant une évaluation de $f'(x_0)$ par cette formule.

Exercice 2

Tester la fonction précédente pour des valeurs de h de la forme $\dfrac{1}{10^k}$ dans les cas suivant : sin en 0, exp en 0, cos en $\frac{\pi}{6}$.
Dans chaque cas, on fera apparaître la différence entre la valeur calculée et la valeur réelle, qui est connue. C'est la dépendance de (la valeur absolue de) cette différence vis-à-vis de h qui nous intéresse. Présenter les résultats dans un tableau analogue à celui proposé dans la question 6

Expérimentalement, quel est le comportement de $\left| \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right|$ par rapport à f ?

Si f est de classe C^3 au voisinage de x_0, on peut sensiblement améliorer la qualité d'approximation à moindre coût : d'une part

$\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$ mais d'autre part

$$\left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \right| \leq M_3 \frac{h^2}{6}$$

Exercice 3

Ecrire une fonction approchant effectivement la dérivée d'une fonction en un point via cette formule. La tester sur les exemples précédents et évaluer l'erreur effectuée en fonction de h.

Exercice 4

1) Tester la fonction dicho3 (polycopié) avec la fonction sin, $[a,b]=[3,4]$ et $f : x \mapsto -39-43x+39x^2-5x^3$, $[a,b]=[1,5]$ et différentes valeurs de e.

2) Tester la méthode de Newton dans les conditions précédentes. comparer les précisions des deux méthodes.

3) Reprendre les calculs avec la méthode de la sécante.

Exercice 5

1) Donner une valeur approchée avec 6 décimales exactes de l'équation $x = 1 - \dfrac{1}{4}\cos x$.

2) En posant $g(x) = 1 - \dfrac{1}{4}\cos x,\ x_0 \in [0,\pi]$ montrer que $|x_k - l| \leq C^k |x_0 - l|$ où l est le point fixe de g. Donner une estimation de C et en déduire le nombre d'itérations (maximum) nécessaires pour obtenir l à 10^{-3} près en utilisant l'algorithme de la première question.

exercice 6

Ecrire les programmes de calculs approchés d'intégrales par les méthodes des rectangles, du trapèze, de simpson.

Résumer les qualités d'approximation et temps de calcul nécessaires à l'évaluation de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.

Pour le calcul du temps placer $t_0 = \text{time.time()}$ avant le programme et $t_1 = \text{time.time()}$ à la fin.

comparer à la fonction **quad** de la bibliothèque **scipy.integrate**.

Rectangles :

n	10^2	10^4	10^6
Temps (secondes)			
$\lvert R_n - 1 \rvert$			

Trapèzes :

n	10^2	10^4	10^6
Temps (secondes)			
$\lvert T_n - 1 \rvert$			

Simpson :

n	10^2	10^4	10^6
Temps (secondes)			
$\lvert S_n - 1 \rvert$			

La bibliothèque **numpy** permet de manipuler des matrices et de faire des opérations matricielles. L'instruction A = array([[5, 3, 2], [7, 4, 1]]) permet d'obtenir :

```
>>> A
array([[5, 3, 2],
       [7, 4, 1]])
```

qui est une matrice de type (2,3). L'instruction **A=zeros(**[3, 4]**)** crée une matrice de type (3,4) composée de 0. L'instruction **B=ones(**[3, 4]**)** crée une matrice du même type composée de 1.

Il est possible de récupérer le fichier numpy.pdf sur mon site qui donne les possibilités de **numpy**. Testez les instructions **np.zeros([3, 4]) + 8**, **np.ones([3, 4])*8**, **eye(4)**, **eye(4,dtype='int')**, **random.randint(10,size=(4,3))**.

```
>>> # on définit un vecteur
>>> np.array([1,3,5])
array([1, 3, 5])
>>> # on définit une matrice-ligne
>>> np.array([[1,3,5]])
array([[1, 3, 5]])
>>> # on définit une matrice-colonne
>>> np.array([[1],[3],[5]])
array([[1],
[3],
[5]])
```

Le produit matriciel de deux matrices A et B, lorsqu'il est possible s'obtient par **dot(A,B)**. Définir deux matrices A et B, aléatoires et faire leur produit.

Exercice 7

Définir une fonction **def E(n,p,i,j) :** qui permet d'obtenir la matrice $E_{i,j}$ à n lignes et p colonnes. Effectuer le produit : $E(3,5,2,1) * E(5,6,1,4)$.

Exercice 8

Définir une fonction **def powmat(M,k) :** calculant la puissance k-ième de la matrice carrée M