TP 13

Exercice 1

Ecrire une fonction **def pivot-nonnul(A,i) :** et une fonction **def pivot-max(A,i) :** (sans regarder le cours) qui calcule le premier terme non nul (respectivement le plus grand) $|a_{ji}|$, $j \geq i$ de la matrice A.

Exercice 2

Ecrire une fonction **def echange(A,i,j)** (sans regarder le cours) qui permute les lignes L_i et L_j de la matrice A.

Exercice 3

ecrire une fonction **def resolution(A,b)** qui résoud le système $AX = b$ (sans regarder le cours) en utilisant l'algorithme suivant :

pour i de 0 à n - 2 faire Trouver j entre i et n - 1 tel que $|a_{ji}|$ soit maximal. # car pivot partiel
pour l'algorithme de base, on se contente de trouver un terme non nul.
Échanger L_i et L_j #(coefficients de la matrice et membres de droite) si necessaire.
pour k de i + 1 à n-1 faire
$Lk \leftarrow Lk - \dfrac{a_{ki}}{a_{ii}} L_i$ # mettre à zéro les coefficients en position $(k; i)$
Arrivé ici, le système est sous forme triangulaire et il n'y a plus qu'à « remonter », via des substitutions. Le résultat est mis dans une liste/tableau x et il s'agit donc de calculer :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n-1} a_{ik} x_k \right)$$

pour i de n - 1 à 0 faire
pour k de i + 1 à n - 1 faire
$y_i \leftarrow y_i - a_{ik} x_k$
$x_i \leftarrow d \frac{y_i}{a_{ii}}$

exercice 4

Tester le programme sur les exemples suivants :

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 5 \\ 5x - 2y &= -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z &= 2 \\ y - 6z &= -3 \\ z &= 4 \end{cases}$$

Exercice 5

Ecire une foncton **def inverse(A) :** qui inverse une matrice inversible en transformant A en la matrice identité par opérations élémentaires sur les lignes en appliquant simultanément les mêmes opérations sur les lignes de la matrices identité. Utiliser la fonction **pivot-nonnull**

dans l'algorithme suivant L représentent les lignes de A et M celles de I

La première étape se passe comme pour la résolution d'un système :

pour i de 0 à n - 2 faire
Trouver j entre i et n - 1 tel que a_{ji} soit non nulle.

Echanger L_i et L_j .
Echanger M_i et M_j

pour m de i + 1 à n-1 faire
$L_m \leftarrow L_m - \dfrac{a_{mi}}{a_{ii}} L_i$ # mettre à zéro les coefficients en position $(m; i)$

$M_m \leftarrow M_m - \dfrac{a_{mi}}{a_{ii}} M_i$
A est alors transformée en une matrice triangulaire supérieure
I est alors transformée en une matrice triangulaire inférieure
Deuxième etape.

pour k de n-2 à 1 faire
Trouver l entre n - 1 et k tel que a_{lk} soit non nulle.
Echanger L_k et L_l
Echanger M_k et M_l

pour m entre k-2 et 0 faire
$L_m \leftarrow L_m - \dfrac{a_{mk}}{a_{kk}} L_k$

$M_m \leftarrow M_m - \dfrac{a_{mk}}{a_{kk}} M_k$

pour i entre 0 et n-1 faire
pour j entre 0 et n-1 faire
$M_i \leftarrow \dfrac{M_i}{a_{ii}}$

retourner M.

Exercice 6

On considère la matrice suivante, obtenue à partir de la fonction **def math_lapl(n) :**, figurant dans le TP précédent, inverser cette matrice pour différentes valeurs de n.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots\ddots & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Lorsqu'une matrice inversible A ne nécessite aucun échange de ligne dans la méthode de Gauss il est possible d'écrire $A = LU$ où L (respextivement U) est une matrice triangulire inférieure (respectivement triangulaire supérieure). ce résultat est obtenu par la méthode de Gauss.
Lorsque par opérations sur les lignes (sans échange) la matrice A est transformée en matrice triangulaire supérieure (c'est U) la matrice I est transformée par les mêmes opérations en L^{-1}. Ecrire une fonction **def gauss_lu(A)** qui renvoie les deux matrices L et U.

Exercice 8

Quand la matrice A est sous la forme LU, résoudre un système $Ax = b$ revient à résoudre deux systèmes simples :$Ly = b$ puis $Ux = y$. Ecrire deux fonctions **def trian_inf(L,y) :** et **def trian_sup(M,x) :** réalisant ces résolutions.