TP 8

Exercice 1

Le crible d'Erathostene repose sur la remarque que si $n \in \mathbb{N}^*,\ n = p\,q$ alors un des entiers p ou q est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

L'algorithme procède par élimination : il s'agit de supprimer d'une table des entiers de 2 à N tous les multiples d'un entier.
En supprimant tous les multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier, et qui sont donc les nombres premiers.

On commence par rayer les multiples de 2, puis à chaque fois on raye les multiples du plus petit entier restant.
On peut s'arrêter lorsque le carré du plus petit entier restant est supérieur au plus grand entier restant, car dans ce cas, tous les non-premiers ont déjà été rayés précédemment.
À la fin du processus, tous les entiers qui n'ont pas été rayés sont les nombres premiers inférieurs à N.

Ecrire une fonction **def premier(n) :** qui renvoie la liste de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n en utilisant l'algorithme ci dessus en procédant de la manière suivante :

On commencera par créer une liste de nombres $L = [0, 0, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, 100]$ on note 0 à la place de 1 car 1 n'est pas premier.
on progresse dans la liste, et à chaque fois qu'on trouve un nombre différent de 0 : c'est un nombre premier, et on met à 0 tous ses multiples.
A la fin, on retourne la liste de tous les nombres qui ne sont pas nuls.

Exercice 2

Ecrire une fonction **def diviseurs(n) :** qui renvoie la liste des diviseurs de n. On utilisera une boucle effectuant au maximum $\sqrt{n}$ itérations.

Exercice 3

Ecrire une fonction **decompose(n) :** qui donne la liste de tous les diviseurs premiers de l'entier n. Exemple : Appliquée à 36 elle donnera : $[2, 2, 3, 3]$. On divisera par 2 tant que c'est possible, puis par tois puis de deux en deux jusqu'à $\sqrt{n}$ au maximum, on peut même améliorer ce dernier nombre et diminuer la complexité de l'algorithme.

Exercice 4

Ecrire une fonction **def pgcdbezout(a,b)** qui renvoie le pgcd des entiers a et b ainsi que des coefficients de Bezout. On procédera de la manière suivante : A chaque étape de l'algorithme d'Euclide le programme calculera des coefficients u_i et v_i tels que $a\,u_i + b\,v_i = r_i$.
$a * 1 + b * 0 = a = r_0,\ 0 * a + 1 * b = b = r_1$ est l'initialisation. On remarquera que :
$r_i = u_i a + v_i b$ et $r_{i-1} = r_i\,q_i + r_{i+1}$ ce qui entraine :
$r_{i+1} = r_{i-1} - r_i\,q_i = u_{i-1}\,a + v_{i-1}\,b - -(u_i\,a + v_i\,b)\,q_i$ ce qui entraine :
$r_{i+1} = r_{i-1} - r_i\,q_i,\ u_{i+1} = u_{i-1} - u_i\,q_i,\ v_{i+1} = v_{i-1} - v_i\,q_i.$
Le programme utilisera les variables r, u, v, r_1, u_1, v_1 et la variable $q = r//r_1$.
On initialisera $(r, u, v, r_1, u_1, v_1) = (a, 1, 0, b, 0, 1)$ puis on réalisera un boucle calculant les valeurs de ces variables en utilisant les remarques précédentes, on aura donc :
$(r, u, v, r_1, u_1, v_1) = (r_1, u_1, v_1, r - qr_1, u - qu_1, v - qv_1).$

Exercice 5

Rappel : Pour calculer a^n il est possible d'utiliser l'algorithme suivant : Cas de base : si $n = 0$ retourner 1 sinon retourner $(a^{n//2})^2$ si n est pair et $a * a^{n-1}$ sinon. Ecrire une fonction **def expo(a,n) :** réalisant ce calcul de manière récursive, autrement dit $(a^{n//2})^2$ s'écrira $expo(a, n//2)^2$ par exemple.