Exercice 1

Le crible d'Erathostene repose sur la remarque que si $n \in \mathbb{N}^*,\ n = p\,q$ alors un des entiers p ou q est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

1) Ecrire une fonction booléenne **def prem(n) :** qui teste si un nombre n est premier ou non.

2) Ecrire une fonction **def nbrespremier(n) :** qui renvoie la liste de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Exercice 2

Ecrire une fonction **def diviseurs(n) :** qui renvoie la liste des diviseurs de n. On utilisera une boucle effectuant au maximum $\sqrt{n}$ itérations.

Exercice 3

1) Ecrire une fonction **decompose(n) :** qui donne la liste de tous les diviseurs premiers de l'entier n. Exemple : Appliquée à 36 elle donnera : $[2, 2, 3, 3]$. On divisera par 2 tant que c'est possible, puis par tois puis de deux en deux jusqu'à $\sqrt{n}$ au maximum, on peut même améliorer ce dernier nombre et diminuer la complexité de l'algorithme.

2) Ecrire une fonction **decompose2(n) :** qui construit un dictionnaire vp où $vp[q] = k$ si q étant un nombre premier, il intervient sous la forme q^k dans la décompostion de n sous forme de produit de facteurs premiers. La fonction renvoyant les couples $(q, vp[q])$ sous forme de liste triée. Dans l'exemple $n = 2^2\,3^5_,11^2$ le résultat sera : $[(2, 2), (3, 5), (11, 2)]$.

Exercice 4

Ecrire une fonction **def pgcdbezout(a,b)** qui renvoie le pgcd des entiers a et b ainsi que des coefficients de Bezout. On procédera de la manière suivante : A chaque étape de l'algorithme d'Euclide le programme calculera des coefficients u_i et v_i tels que $a\,u_i + b\,v_i = r_i$.
$a * 1 + b * 0 = a = r_0,\ 0 * a + 1 * b = b = r_1$ est l'initialisation. On remarquera que :
$r_i = u_i a + v_i b$ et $r_{i-1} = r_i\,q_i + r_{i+1}$ ce qui entraine :
$r_{i+1} = r_{i-1} - r_i\,q_i = u_{i-1}\,a + v_{i-1}\,b - -(u_i\,a + v_i\,b)\,q_i$ ce qui entraine :
$r_{i+1} = r_{i-1} - r_i\,q_i,\ u_{i+1} = u_{i-1} - u_i\,q_i,\ v_{i+1} = v_{i-1} - v_i\,q_i$.
Le programme utilisera les variables r, u, v, r_1, u_1, v_1 et la variable $q = r//r_1$.
On initialisera $(r, u, v, r_1, u_1, v_1) = (a, 1, 0, b, 0, 1)$ puis on réalisera un boucle calculant les valeurs de ces variables en utilisant les remarques précédentes, on aura donc :
$(r, u, v, r_1, u_1, v_1) = (r_1, u_1, v_1, r - qr_1, u - qu_1, v - qv_1)$.