Exercice 1. evaluation numérique d'une dérivée

On sait que si une fonction f est dérivable en x_0 on a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ avec

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| \leq M_2\frac{h}{2}$$

si f est deux fois dérivable au voisinage de x_0.
Ecrire une fonction prenant en entrée f, x_0, h et renvoyant une évaluation de $f'(x_0)$ par cette formule.

Exercice 2

Si f est de classe C^3 au voisinage de x_0, on peut sensiblement améliorer la qualité d'approximation à moindre coût : d'une part

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$ mais d'autre part

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0)\right| \leq M_3\frac{h^2}{6}$$

Ecrire une fonction prenant en entrée f, x_0, h et approchant effectivement la dérivée d'une fonction en un point via cette formule.

Exercice 3

1) Tester la fonction dicho3 (polycopié) avec la fonction sin, $[a,b]=[3,4]$ et $f : x \mapsto -39-43x+39x^2-5x^3$, $[a,b]=[1,5]$ et différentes valeurs de e.

2) Tester la méthode de Newton dans les conditions précédentes. comparer les précisions des deux méthodes.

3) Reprendre les calculs avec la méthode de la sécante.

Exercice 4

1) Donner une valeur approchée avec 6 décimales exactes de l'équation $x = 1 - \frac{1}{4}\cos x$.

2) En posant $g(x) = 1 - \frac{1}{4}\cos x,\ x_0 \in [0,\pi]$ montrer que $|x_k - l| \leq C^k|x_0 - l|$ où l est le point fixe de g. Donner une estimation de C et en déduire le nombre d'itérations (maximum) nécessaires pour obtenir l à 10^{-3} près en prenant $x_0 = 1$.