CALCULS ALGEBRIQUES

1 Sommes et produits

1.1 Sommes

Définition 1 *Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des nombres de cette famille.*

Lorsque $m, n \in \mathbb{Z},\ m \leq n,\ I = [\![m, n]\!]$ on note la somme $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i$. Cette somme contient $n - m + 1$ termes. La variable i est une variable muette qui peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre :
$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_j$ par exemple.

Exemple 1 $\sum_{i=2}^{7} 3 = 3(7 - 2 + 1) = 18 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3.$
$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$

1.1.1 Sommes télescopiques

Définition 2 *Ce sont des sommes de la forme : $\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k)$.*

Proposition 1 $\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$

Ce résultat est vérifié sans difficulté.

Exemple 2 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$

1.1.2 Propriétés

1) <u>Relation de chasles</u>
Soient I_1 et I_2 deux ensembles finis non vides et disjoints $(I_1 \cap I_2 = \emptyset)$ et $I = I_1 \cup I_2$ et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres.
$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i.$
Cas particulier : $p, q, n \in z,\ p \leq q < n,\ \sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k.$

2) <u>Linéarité</u>
Soit I un ensemble fini non vide, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres, λ, μ sont deux nombres réels ou complexes.
$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i.$

3) <u>Produit</u> $\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i\, b_j$ où I et J et donc aussi $I \times J$ sont des ensembles finis non vides.

1.1.3 Sommes à connaitre impérativement

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ ou } a \in \mathbb{C}, \ S_3 = \sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Exercice 1 *1) Calculer* $\sum_{k=2}^{10}(2+3k-5k^2)$.

2) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = S_1^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3) Soit (a_k) *une suite arithmétique de raison* r *réelle ou complexe : Pour tout* k *dans* $\mathbb{N}$, $a_{k+1} = a_k + r$. *Vérifier que pour tout* $i \in [\![0, n-m]\!]$, $m \leq n$ *on a* $a_{m+i} + a_{n-i} = a_m + a_n$. *En déduire :* $\sum_{k=m}^{n} a_k = (n-m+1)\frac{a_m + a_n}{2}$.

4) Soit (a_k) *une suite géométrique de raison* $q \neq 1$ *réelle ou complexe, vérifier que :* $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-a}$, $m \leq n$. *Quelle est la valeur de la somme, en fonction de* a_0, *si* $q = 1$ *?*

Autres sommes à connaitre

Soient x, y réels ou complexes et $n \in \mathbb{N}^*$. $x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k\right)$.

Si n est impair : $x^n + y^n = (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-1-k} y^k\right)$, on a en effet : $x^n + y^n = x^n - (-y)^n$ dans ce cas.

Exemple 3 *1)* $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.

2) $x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$, $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$.

1.1.4 Changement d'indices ou réindexation

Soit $I = [\![m, n]\!]$, $m \leq n$ et $r \in \mathbb{Z}$. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+r}^{n+r} a_{j-r} = \sum_{i=m+r}^{n+r} a_{i-r}.$$

Ceci se traduit par :$a_m + a_{m+1} + \cdots a_n = a_{(m+r)-r} + a_{(m+1+r)-r} + \cdots + a_{(n+r)-r}$.

Exemple 4 *1)* $S_1 = \sum_{i=3}^{n} i^3$, *on pose* $j = i - 3$.

$S_1 = \sum_{j=0}^{n-3}(j+3)^3 = \sum_{i=0}^{n-3}(i+3)^3$.

2) $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, *on pose* $l = k - 1$.

$$S_2=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{(l+1)(l+2)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

<u>Inversion du sens de parcours</u>

$I=[\![m,n]\!]$, $S=\sum_{i=m}^{n}a_i$. On pose $j=m+n-i$, j décrit I en décroissant.

$$S=\sum_{i=m}^{n}a_i=\sum_{j=m}^{n}a_{m+n-j}.$$

<u>Regroupement de termes d'indices pairs et d'indices impairs</u>

$$\sum_{k=p}^{n}a_k=\sum_{k=p,k\ pair}^{n}a_k+\sum_{k=p,k\ impair}^{n}a_k.$$

Exemple 5 $S=\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{k}{2}\right]=\sum_{k=1,k\ pair}^{100}\left[\frac{k}{2}\right]+\sum_{k=1,k\ impair}^{100}\left[\frac{k}{2}\right]$.
k pair, $k=2k'$, $k'\in[\![1,50]\!]$, k impair, $k=2k'+1$, $k'\in[\![0,49]\!]$.

$$S=\sum_{k=1}^{50}k'+\sum_{k=0}^{49}k'=2.\frac{49.50}{2}+50=2500\ car\ \left[\frac{2k'+1}{2}\right]=k'.$$

1.1.5 Sommes doubles

Exemple 6 *Un magasin emploie quatre vendeurs. On veut étudier le montant S des ventes sur une année. on pose $I=[\![1,4]\!]$, $J=[\![1,12]\!]$. On note a_{ij} le montant des ventes réalisées par le vendeur $i\in I$ le mois $j\in J$. $S_i=\sum_{i=1}^{12}a_{ij}$, $i\in I$ est le montant des ventes réalisées par le vendeur i sur l'année.*

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4=\sum_{i=1}^{4}S_i=\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{12}a_{ij}\right).$$

La somme $\sum_{i=1}^{4}a_{ij}$ est le montant total des ventes réalisées le mois $j\in J$, on a donc aussi :

$$S=\sum_{i=1}^{12}\left(\sum_{i=1}^{4}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{12}a_{ij}\right).$$

Définition 3 *Soient I,J deux ensembles finis non vides et $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels ou complexes.*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}a_{ij}=\sum_{i\in I}\underbrace{\left(\sum_{j\in J}a_{ij}\right)}_{i\ fixe}=\sum_{j\in J}\underbrace{\left(\sum_{i\in I}a_{ij}\right)}_{j\ fixe}$$

Lorsque $I=[\![p,n]\!]$, $J=[\![q,m]\!]$, $p\le n$, $q\le m$,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}a_{ij}=\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=q}^{m}a_{ij}\right)=\sum_{j=q}^{m}\left(\sum_{i=p}^{n}a_{ij}\right).$$

Si $I=J=[\![m,n]\!]$, $m\le n$ on note $\sum_{(i,j)\in I\times J}a_{ij}=\sum_{m\le i,j\le n}a_{ij}$.

Exemple 7

$$S=\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)+\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right)$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+(n-1)i\right)$$

$$S=(n+\frac{1}{2})\sum_{i=1}^{n}i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sommes triangulaires

Définition 4 *Soient $A=\{(i,j)\mid m\le i\le j\le n\}$ et $(a_{ij})_{(i,j)\in A}$ une famille de nombres réels ou complexes.*

$$\sum_{(i,j)\in A}=\sum_{m\le i\le j\le n}a_{ij}=\sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{j=m}^{n}\left(\sum_{i=m}^{j}a_{ij}\right).$$

Exemple 8

$$\sum_{1\le i\le j\le n}ij=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}ij\right)=\sum_{j=1}^{n}j\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)=\sum_{j=1}^{n}j\frac{j(j+1)}{2}$$

$$\sum_{1\le i\le j\le n}ij=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

2 Produits

Définition 5 *Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note $\prod_{i\in I}a_i$ le produit de ces nombres.*

Si $I=[\![m,n]\!],\ m,n\in\mathbb{Z},\ m\le n$le produit est noté $\prod_{i=m}^{n}a_i$, ce produit contient $n-m+1$ facteurs.

Exemple 9 *1)* $\prod_{k=1}^{n}k=n!$.

2) $\prod_{k=1}^{n}2=2^n$.

Définition 6 *Produits télescopiques*

C'est un produit de la forme $\prod_{k=m}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}$ où quel que soit $k\in[\![m,n]\!],\ a_k\neq 0$.

Proposition 2 *Sous les hypothèses précdentes, $\prod_{k=m}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_{n+1}}{a_m}$.*

Exemple 10 *1)* $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2(k+1)-1}{2k-1}=\frac{2(n+1)-1}{2-1}=2n+1.$

2) $\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}}=\frac{1}{n+1}.$

Remarque 1 *1) Lorsque* $a_k > 0,\ k \in [\![m, n]\!]$ *on peut ransformer un produit en somme.* $\ln\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) = \sum_{k=m}^{n} \ln a_k$.

2) Règles de calcul
Soit I *un ensemble fini non vide et* $(a_k)_{k\in I},\ (b_k)_{k\in I}$ *deux familles de nombres réels ou complexes.*

$$\prod_{k\in I} a_k b_k = \prod_{k\in I} a_k \prod_{k\in I} b_k.$$

$$\prod_{k\in I} a_k^n = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)^n.$$

3 Coefficients binomiaux

Définition 7 *Factorielle*
1) $0! = 1,\ n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1.2.\cdots.n.$

2) Coefficients binomiaux
Soient $n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N},\ p \leq n.$ $\binom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}.$

Popriétés 3 . $\binom{n}{p} \in \mathbb{N},\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.\ \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

. $n, p \in \mathbb{N}^*, p \leq n,\ \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}.$

. $\binom{n+1}{p+1} = \dfrac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}.$

Exemple 11 $P_1 = \prod_{k=1}^{p}(n-k+1) = \prod_{j=n-p+1}^{n} j = \dfrac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{j=1}^{n-p} j} = \dfrac{n!}{(n-p)!}.$

$$P_2 = \prod_{k=1, k\ pair}^{2n} k = \prod_{p=1}^{n} 2p = 2^n\, n!.$$

$$P_3 = \prod_{k=1, k\ impair}^{2n+1} k = \frac{(2n+1)!}{P_2} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

Triangle de Pascal

En utilisant $n, p \in \mathbb{N}^*, p \leq n,\ \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$, on obtient le tableau de Pascal permettant le calcul des coefficients binomiaux de proche en proche :

p / n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Formule du binome de Newton
Soient a, b deux nombres réels ou complexes, $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

La démonstration se fait par récurrence sur n.

Remarque 2 *Le nombre $\binom{n}{k}$ représente le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.*

Exemple 12 *1)* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ *est le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.*

2) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n\, 2^{n-1}$.

4 Système linéaires

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$.

4.1 Définition

Définition 8 *Un système linéaire de n équations à p inconnues est un ensemble d'équations de la forme :*

$$(S) \left\{ \begin{array}{r} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1p}\, x_p = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2p}\, x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{np}\, x_p = b_n \end{array} \right.$$

Les $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, éléments de $\mathbb{K}$, sont les coefficients du système. Les $b_1, b_2, \cdots, b_n$, également éléments de $\mathbb{K}$, sont les seconds membres du système, $u = (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est le p-uplet des inconnues du système.
u est solution du système du système si les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ satisfont les n équations du système (S).
Le système homogène associé à (S) est le système (S_0) dans lequel $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. On note $\mathcal{S}$ les solutions du système (S) et $\mathcal{S}_0$ les solutions du système (S_0).

4.2 Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble $\mathcal{S}$ peut être vide, alors que $(0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^p$ est toujours solution de $\mathcal{S}_0$.

Exemple 13

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{array} \right.$$

n'admet pas de solution alors que $(0,0)$ est solution de

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$$

Proposition 4 *Si $u_0=(x_1,x_2,\cdots,x_p)\in\mathbb{K}^p$ est solution particulière de (S), l'ensemble des solutions est :* $\mathcal{S}=u_0+\mathcal{S}_0=\{(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_p+y_p)\mid(y_1,y_2,\cdots y_p)\in\mathcal{S}_0\}$.

4.3 Cas particulier important

$n=p=2$, $\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$ $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{K}$. On pose :

$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$.

Proposition 5 *Le système précédent admmet une solution unique si et seulement si $D\neq 0$ donnée par :*

$x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$.

Le système est en effet équivalent à :

$\begin{cases} (ad-bc)x &= de-ef \\ (cb-ad)y &= ce-af \end{cases}$ qui est obtenu en faisant dL_1-bL_2 et cL_1-aL_2.

Si $D=0,\ D_x\neq 0$ ou $D_y\neq 0,\ \mathcal{S}=\emptyset$.
Si $D=0,\ D_x=0$ et $D_y=0,\ \mathcal{S}=\{(x,y)\mid ax+by=e$ ou $cx+dy=f\}$ contenant une infinité de solutions.

Remarque 3 *Un système carré $(n=p)$ admettant une solution unique est appelé système de Cramer, si $n=2$ ceci correspond à $D\neq 0$.*

5 Pivot de Gauss

Définition 9 *On note $L_i : a_{i1}\,x_1+a_{i2}\,x_2+\cdots+a_{ip}\,x_p=b_i$ la i-ème équation (ou ligne) du système précédent.*

Opérations élémentaires sur les lignes :
1) Echanger deux lignesL_i et L_j, notation : $L_i\longleftrightarrow L_j$.
2) Multiplier la ligne L_i par $\lambda\in\mathbb{K}^*$, notation : $L_i\longleftarrow\lambda L_i$.
3) Ajouter a la ligne L_i un multiple de la ligne L_j, notation : $L_i\longleftarrow L_i+\lambda L_j$, $\lambda\in\mathbb{K}$.

Proposition 6 *On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.*

1) On modifie seulement l'ordre des équations.
2) X vérifie L_i si et seulement si X vérifie λL_i.
3) X vérifie L_i et L_j si et seulement si X vérifie $L_i+\lambda L_j$ et L_j.

La méthode de Gauss consiste à réaliser des Opérations élémentaires sur les lignes pour obtenir un système triangulaire. Il est nécessaire de bien ordonner et aligner les inconnues.

Exemple 14 $\begin{cases} -t-2x+\ \ y+\ \ z=1 \\ \qquad\ x-2y+\ \ z=0 \\ \ \ t+\ \ x\qquad\ -2z=-1 \\ 2t\qquad\ +\ y-\ \ z=1 \end{cases}$ $L_2\longleftrightarrow L_1$

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -t-2x+y+z=1 \\ t+x-2z=-1 \\ 2t+y-z=1 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2+2L_1,\ \ L_3 \longleftarrow L_3-L_1.$$

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -t-3y+3z=1 \\ t+2y-3z=-1 \\ 2t+y-z=1 \end{cases} \quad L_2 \longleftrightarrow L_4$$

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2t+y-z=1 \\ t+2y-3z=-1 \\ -t-3y+3z=1 \end{cases} \quad L_3 \longleftarrow L_3-2L_2,\ L_4 \longleftarrow L_4+3L_2.$$

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2t+y-z=1 \\ -3t-z=-3 \\ 5t=4 \end{cases}$$

$t=\dfrac{4}{5},\ z=3-3t=\dfrac{3}{5},\ y=z-2t+1=0,\ x=2y-z=-\dfrac{3}{5},$ *le système est de Cramer.*