CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

1 Le corps des nombres complexes

1.1 Définition de $\mathbb{C}$

Définition On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de deux lois de compositions internes :

$$(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4 \ , \begin{cases} (x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y') \\ (x,y)(x',y') &= (xx'-yy',xy'+yx') \end{cases}$$

Proposition
L'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition et de la multiplication, a une structure de corps.
$(\mathbb{R}^2,+)$ et $(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\},.)$ sont des groupes commutatifs L'élément neutre pour + est (0,0).
L'opposé de (x,y) est $(-x,-y)$.
L'élément neutre pour le produit est $(1,0)$.
Pout tout $z=(x,y)\neq(0,0)$, l'inverse de z est $\frac{1}{z}=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})$.
Définition et notation
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble muni des deux lois précédentes. On dit que $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes.
Proposition
Le sous ensemble $F=\{(x,o)|x\in\mathbb{R}\}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ et l'application
$f: x\to(x,0)$ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur F. Cet isomorphisme permet d'identifier le réel x et le complexe $(x,0)$

1.2 Notation algébrique

Dans le corps $\mathbb{C}$, on note $i=(0,1)$. On peut alors écrire
$z=(x,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)$, en identifiant $\mathbb{R}$ et F on obtient $z=x+iy$, appelé notation algébrique du nombre complexe z.
Définition

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, on appelle
partie réelle de z le réel a noté $\Re(z)$,
partie imaginaire de z le réel b noté $\Im(z)$,
conjugué de z le nombre complexe $a-ib$ noté $\overline{z}$,
module de z le réel $\sqrt{a^2+b^2}$ noté$|z|$.
Un nombre complexe z est dit réel si $\Im(z)=0$, imaginaire pur si $\Re(z)=0$.

1.3 Interprétation géométrique des nombres complexes

Définition Le plan complexe:
Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct . Soit
$\phi: x+iy\in\mathbb{C}\to M(x,y)\in\mathcal{P}$.
ϕ est une bijection . Le plan $\mathcal{P}$ est appelé abusivement le plan complexe , $M=\phi(z)$ est appelé **image** de z et est noté $M(z)$, $z=\phi^{-1}(M)$ est appelé **affixe** de M.
De même, on peut définir une bijection
$\psi:\mathbb{C}\to\overrightarrow{\mathcal{P}}$ du corps des complexes vers le plan vectoriel, muni d'une base orthonormée directe $B=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ par $z=x+iy\to\psi(z)=\overrightarrow{V}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$. $\overrightarrow{V}$ est appelé image de z et z affixe de $\overrightarrow{V}$.
Proposition
Soient z et z' deux nombres complexes
1. $M(z)$ et $M'(z')$ sont symétriques par rapport à O $\Longleftrightarrow z'=-z$
2. $M(z)$ et $M'(z')$ sont symétriques par rapport à Ox $\Longleftrightarrow z'=\overline{z}$
3. $M(z)$ et $M'(z')$ sont symétriques par rapport à Oy$\Longleftrightarrow z'=-\overline{z}$
4. $b\in\mathbb{C}$, $M'(z+b)$ est obtenu à partir de $M(z)$ par translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe b.

Les applications

$$f_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \ , \ M(z) \to M'(\overline{z}) \ , \ f_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \ , \ M(z) \to M'(z+b)$$

représentent donc respectivement la symétrie par rapport à Ox et la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe b.

Les point M et A ayant respectivement z et a pour affixe, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$ est $z-a$, de plus, on a $|z| = OM$, $|z-a| = AM$.
L'ensemble $\{M(z) || z-a| < r \ , \ (\text{resp.} \le r)\}$ est le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

2.1 Groupe U des nombres complexes de module 1

On définit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$.
$\mathbb{U}$ est stable pour la multiplication : $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2 \ , \ zz' \in \mathbb{U}$.
$\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse : $\forall z \in \mathbb{U} \ , \ \dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.
On traduit ceci en disant que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
Proposition
1 $\forall t \in \mathbb{R}$ on note, $e^{it} = \cos t + i \sin t$,**tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire** e^{it}
c'est à dire $\forall z \in \mathbb{U} \ \ \exists t \in \mathbb{R} \ , \ z = e^{it}$.
2. $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2 \ e^{it} e^{it'} = e^{i(t+t')}$
3. $\forall t \in \mathbb{R} \ \ \frac{1}{e^{it}} = e^{-it}$
4. $e^{it} = 1 \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Relations d'Euler
On obtient à partir de 1 les résultats suivants
$\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \ , \ \sin t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2i}$.
Formule de Moivre
La formule 2 entraine
$(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n = e^{int} = \cos nt + i \sin nt$.

Propriétés de l'application $f : t \to e^{it}$
L'application f est une surjection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{U}$.
$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(t + t') = f(t)f(t')$, cette propriété se traduit en disant que f est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe multiplicatif $(\mathbb{U}, .)$.
$f(t) = 1 \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}$. On traduit cette propriété en disant que le noyau du morhisme f est $2\pi\mathbb{Z}$.

Définition
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = |z| \, e^{i\theta}$ où θ est un réel . L'ensemble des **arguments** de z est l'ensemble des réels θ tels que $z = |z| \, e^{i\theta}$.

2.2 Applications trigonométriques

Les relations d'Euler permettent de linéariser $\cos^p x \ , \ \sin^q x \ , \ \cos^p x \sin^q x$.
Exemple. Linéarisation de $\cos^5 x$

$$\cos^5 x = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^5 = \frac{(e^{i5x} + e^{-i5x}) + 5(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})}{32}$$
$$= \frac{2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x}{32} = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x).$$

La formule de Moivre permet de calculer $\cos nx$, $\sin nx$ comme polynôme en $\cos x$, $\sin x$.
Exemples
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

$\sin 3x = 4\sin x\cos^2 x - \sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
On peut également exprimer $\tan nx$ sous forme de fraction de $\tan x$.

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

3 Equations dans $\mathbb{C}$

3.1 Racines nième de l'unité:

Definition
Soit $n \in \mathbb{N}$ on appelle racine nième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines nième de l'unité .

Theoreme
1. $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad k \in \{0, 1......, n-1\}\}$
2. $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$ c'est à dire $\forall (z, z') \in \mathbb{U}_n^2 \quad zz' \in \mathbb{U}_n \quad , \forall z \in \mathbb{U}_n \quad \frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.
3. Les images dans le plan des éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés .
4. $(\mathbb{U}_n, \times)$ est engendré par $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ c'est à dire $\mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in \{0, ...n-1\}\}$.

On peut même démontrer que $\mathbb{U}_n$ est engendré par $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec k premier avec n .

Proposition
1. L'equation $1 + z + z^2 + \quad z^{n-1} = 0$ a pour racines l'ensemble des éléments de $\mathbb{U}_n \backslash \{1\}$.
2. $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} \quad U_4 = \{1, i, -1, -i\}$
3. $\overline{\omega^k} = \omega^{n-k}$

3.2 Racines nième d'un nombre complexe:

Theoreme
L'équation $z^n = \rho e^{i\theta} \ \rho > 0$ a n solutions complexes .
L'ensemble des solutions est $S = \{z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad , \quad k \in \{0, \quad , n-1\}\} = \{z_0\omega^k \quad k \in \{0, \quad , n-1\}\} = \{z_0 z \ , \ z \in \mathbb{U}_n\}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Les images dans le plan des éléments de S sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés .

3.3 Racines carrées d'un nombre complexe:

Méthode trigonométrique :$z^2 = \rho e^{i\theta} \quad S = \{\sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta}{2}} \ , -\sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta}{2}}\}$
Méthode algébrique :$(a + ib)^2 = A + iB$ équivaut à

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = A \\ a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2} \\ 2ab = B \end{cases}$$

Exemple
1.Déterminer les racines carrées de $-7 - 24i$.
2. En exprimant de deux manières différentes les racines carrées de $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Exercice
Calculer les racines carrés des nombres suivants : i , $1 + i$, $9 + 40i$, $\frac{1+i}{1-i}$

3.4 Equations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Theoreme
Soit a, b, c des complexes $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ .En posant $\Delta = b^2 - 4ac$

et en appellant δ et $-\delta$ les racines carrées complexes de Δ l'ensemble des solution est $S = \{\frac{-b+\delta}{2a} \quad , \frac{-b-\delta}{2a}\}$
L'équation a une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$.

Proposition
$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ où z_1 et z_2 sont les racines $S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$
Proposition
Si a, b et c sont réels et $\Delta < 0$ alors $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et les deux racines sont conjuguées .

Exemple Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$z^2 - 2z\cos\phi + 1 = 0 \quad ; \quad 3x^2 + 2x + 2 = 0 \quad ; \quad (1-i)z^2 - (6-4i)z + 9 - 7i = 0$$

4 Exponentielle complexe

Definition
Soit $z = a + ib$ un complexe on note $e^z = e^a e^{ib}$ et on l'appelle exponentielle complexe de z .

Proposition
1. $e^{z+z'} = e^z e^{z'} \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
2. $|e^z| = e^a \quad \arg(e^z) = b$ avec $z = a + ib$
3. $e^z = 1 \iff a = 0 \;\; et \;\; b \in 2\pi\mathbb{Z}$

5 Nombres complexes et géométrie plane

Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes respectives a, b, c, d. Une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ est $\arg \dfrac{d-c}{b-a}$.
Ce résultat entraîne

1. la droite (AB) est parallèle à la droite $(CD) \iff \arg \dfrac{d-c}{b-a} = 0 \mod \pi$

2.la droite (AB) est perpendiculaire à la droite $(CD) \iff \arg \dfrac{d-c}{b-a} = \dfrac{\pi}{2} \mod \pi$.