ENSEMBLES FINIS, DENOMBREMENT

1 Ensembles finis

1.1 Définition

Proposition 1 *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $\phi : [\![1, m]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$.*

1. *Si ϕ est injective alors $m \leq n$.*
2. *Si ϕ est surjective alors $n \leq m$.*
3. *Si ϕ est bijective alors $m = n$.*

1) Récurrence sur m :
H_m : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si ϕ est injective alors $m \leq n$.
H_1 est vraie car $1 \leq n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons H_m vraie et soit $\phi : [\![1, m+1]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ injective.
Soit $\phi(m+1) = n$ auquel cas $\phi([\![1, m]\!]) \subset [\![1, n-1]\!]$, $\phi|_{[\![1,m]\!]}$ est une injection de $[\![1, m]\!]$ sur $[\![1, n-1]\!]$ car $\phi([\![1, m]\!]) \subset [\![1, n-1]\!]$. On a alors $m \leq n-1 \Longrightarrow m+1 \leq n$, soit $H_m \Longrightarrow H_{m+1}$.
Soit $\phi(m+1) = k \leq n$. On se ramène au cas précédent en considérant la transposition $\tau = (k, n) \in S_n$. $\tau \circ \phi$ vérifie les hypothèses précédentes car la composée de deux injections est une injection et $\tau \circ \phi(m+1) = n$. on a donc bien $m+1 \leq n$.

2) Soit $\phi : [\![1, m]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ surjective. Soit $l \in [\![1, n]\!]$, $\phi^{-1}(\{l\})$ est non vide, on note $f(l) \in [\![1, m]\!]$ le plus petit élément de $\phi^{-1}(\{l\})$.
$f : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, m]\!]$ est injective car $f(k) = f(k') \Rightarrow \phi^{-1}(\{k\}) \cap \phi^{-1}(\{k'\}) \neq \emptyset$. Il existe donc $x \in [\![1, m]\!]$ tel que $k = \phi(x) = k'$. On a donc $n \leq m$ d'après 1.

Définition 2 *Un ensemble E est fini si $E = \emptyset$ ou s'il existe une bijection $\phi : E \longrightarrow [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Cet entier n est alors unique il est appelé cardinal de l'ensemble E et noté $Card(E)$ ou $\#E$ ou encore $|E|$. Si $E = \emptyset$, $Card(E) = 0$.*
Si E n'est pas fini on dit qu'il est infini.

L'unicité provient de la proposition précédente :
Si $\phi_1 : E \longrightarrow [\![1, n]\!]$ et $\phi_2 : E \longrightarrow [\![1, m]\!]$ sont des bijections alors $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : [\![1, m]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ est une bijection d'où $m = n$.

Proposition 3 *Si E est un ensemble fini et si $\psi : E \longrightarrow F$ est une bijection, F est fini et $|E| = |F|$*

Soit $\phi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ une bijection alors $\psi \circ \phi : [\![1, n]\!] \longrightarrow F$ est une bijection.

Proposition 4 *si E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in E$ alors $|E - \{a\}| = n - 1$.*

Si $|E| = 1$ alors $E - \{a\} = \emptyset$ et $|E - \{a\}| = 0$.
Si $n \geq 2$, $\phi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ une bijection.
Si $\phi(n) = a$, $\phi|_{[\![1,n-1]\!]} \longrightarrow E - \{a\}$ est une bijection.
Si $\phi(k) = a,\ k \neq n$ on se ramène au résultat précédent en composant $\phi \circ \tau$ où $\tau = (k, n)$ est une transposition.
Dans tous les cas on a $|E - \{a\}| = n - 1$.

Proposition 5 *Soit E un ensemble fini et $F \subset E$, alors F est un ensemble fini et $|F| \leq |E|$ de plus $|F| = |E| \Longleftrightarrow F = E$.*

Si $F = \emptyset$ c'est terminé, sinon on fait une récurrence sur $n = |E|$.
Si n=0 $E = F = \emptyset$. Supposons $n \geq 1$ et H_{n-1} vérifiée. Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Si $F = E$ la conclusion est immédiate, sinon soit $a \in E - F$, alors $F \subset E - \{a\}$ et $|E - \{a\}| = n - 1$ d'après la proposition précédente.
H_{n-1} étant vérifiée F est fini et $|F| \leq n - 1 < n = |E|$.

1.2 Réunion d'ensembles finis

Proposition 6 *Soient A et B deux ensembles finis disjoints ($A \cap B = \emptyset$). $A \cup B$ est fini et $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Soient $f : [\![1, n]\!] \longrightarrow A$ et $g : [\![1, m]\!] \longrightarrow B$ deux bijections. On définit $h : [\![1, n+m]\!] \longrightarrow A \cup B$ par :
$h(k) = f(k)$ si $k \in [\![1, n]\!]$, $h(k) = g(k-n)$ si $k \in [\![n+1, n+m]\!]$.
h est une bijection de $[\![1, n+m]\!]$ sur $A \cup B$ car $h|_{[\![n+1,n+m]\!]}$ est une bijection de $[\![n+1, n+m]\!]$ sur B. On a donc $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$.

Corollaire 7 *Soit E un ensemble fini et $A \subset E$. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. On a alors $|\overline{A}| = |E| - |A|$*

On a en effet $A \cup \overline{A} = E,\ A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Corollaire 8 *Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des ensembles deux à deux disjoints. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ est un ensemble fini et $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |A_i|$.*

On fait une récurrence sur n.

Proposition 9 *Soient A et B deux ensembles finis , $A \cup B$ est fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$*

$A \cup B = A \cup (B - A),\ B = (B - A) \cup (A \cap B)$, les réunions étant disjointes, d'où :
$|A \cup B| = |A| + |B - A|,\ |B| = |(B - A)| + |A \cap B|$.

Corollaire 10 *Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des ensembles finis alors $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ est un ensemble fini et $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |A_i|$.*

Récurrence sur $n \geq 2$.

1.3 Aplications entre ensembles finis

Lemme 11 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application où E est un ensemble fini. Si f est injective alors $f(E)$ est fini et $|f(E)| = |E|$.*

L'application $g : E \longrightarrow f(E),\ x \longmapsto f(x)$ est bijective, ce qui entraine $f(E)$ fini et $|f(E)| = |E|$.

Proposition 12 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application où E est un ensemble fini. $f(E)$ est fini et $|f(E)| \leq |E|$ et $|f(E)| = |E| \Longleftrightarrow f$ est injective.*

Récurrence sur $n = |E|$. Si $n = 0$ $E = f(E) = \emptyset$ et f est injective.
supposons H_{n-1} vérifiée, $n \geq 1$ et soit E ensemble fini de cardinal n.
Si f est injective $f(E)$ est de cardinal n d'après le lemme, sinon il existe $x, y \in E$, distincts, tels que $f(x) = f(y)$. On a alors $f(E - \{y\}) = f(E)$ ce qui entraine d'après l'hypothèse H_{n-1} que $f(E - \{y\})$ est fini et que $|f(E - \{y\})| \leq n - 1$ d'où $|f(E)| \leq n - 1 < n = |E|$.

Corollaire 13 *Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow F$ une application surjective, F est alors un ensemble fini et $|F| \leq |E|$.*

En effet on a $f(E) = F$.

Théorème 14 *Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal. Les propositions suivantes sont équivalentes.*
1) $f : E \longrightarrow F$ est une application injective.
2) $f : E \longrightarrow F$ est une application surjective.
3) $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective.

Les hypothèses entrainent $f(E) = F$.

2 Dénombrement

2.1 Produits cartésiens

Proposition 15 *Soient E et F des ensembles finis. $E \times F$ est fini et $|E \times F| = |E|.|F|$.*

Soit $|F| = n,\ F = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ on a $E \times F = \bigcup_{i=1}^{n} E \times \{b_i\}$ les n éléments de la réunion sont deux à deux disjoints.
L'application $\phi_i : E \longrightarrow E \times \{b_i\},\ x \longmapsto (x, b_i)$ est une bijection d'où $|E \times \{b_i\}| = |E|$ ce qui entraine :
$|E \times F| = |\bigcup_{i=1}^{n} E \times \{b_i\}| = n.|E| = |E|.|F|$.

Corollaire 16 *Soient $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des ensembles finis, l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est fini et*
$|E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|$.

Récurrence sur $n \geq 2$.

2.2 Applications

Proposition 17 *Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs $p \geq 1$ et n. L'ensemble F^E des applications de E vers F est fini et $|F^E| = n^p$.*

Soit $E = \{a_1, a_2, \cdots a_p\}$. L'application :
$\phi : F^E \longrightarrow F^p,\ f \longmapsto (f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_p))$ est une bijection :
$\phi(f) = \phi(g) \Longrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ f(a_i) = g(a_i) \Longrightarrow f = g$. ϕ est injective.
Soit $(y_1, y_2, \cdots, y_p) \in F^p :\ \exists f \in F,\ f(a_i) = y_i,\ i \in [\![1, p]\!]$, ϕ est surjective. D'où $|F^E| = |F^p| = n^p$.

Exemple 18 *Nombre de façons de ranger p objets dans n tiroirs, chaque tiroir pouvant recevoir autant d'objet que l'on veut.*

Parties d'un ensemble

Proposition 19 *Soit E un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble des parties de E, $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal 2^n.*

Soit $A \in \mathcal{P}(E),\ (A \subset E)$. On définit l'application $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1\ si & x \in A \\ 0\ si & x \in E - A \end{cases}$
c'est une application de $\mathcal{P}(E)$ vers $\{0, 1\}$ et l'application
$\phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \{0, 1\}^E,\ A \longmapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection or $|\{0, 1\}^E| = 2^n$.

2.3 Arrangements

Définition 20 *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini. On appelle p-arrangement d'éléments de E, toute p-liste ordonnée d'éléments de E deux à deux distincts.*

Exemple 21 $E = \{1, 2, 3, 4\},\ p = 2$.
$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)$ *sont les douze 2-arrangements des éléments de E.*

Théorème 22 *Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*,\ p \leq n$. Le nombre de p-arragements de E est :*
$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-(p-1)) = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p\ termes\ consecutifs}$.

Récurrence sur p. $A_n^1 = n$. Ayant constitué les $p-1$-arrangements, chacun d'entre eux peut être complété de $n-(p-1)$ façons pour obtenir un p-arrangement, ce qui entraine l'égalité :
$A_n^p = (n-(p-1))A_n^{p-1}$. Exemple $(1,2) \longrightarrow (1,2,3),(1,2,4)$ complété de $4-2$ façons.

Corollaire 23 $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, *avec la convention* $0! = 1$ *d'où si* $|E| = |F| = n$, $A_n^n = n!$.

Exemple 24 *On considère une course de chevaux opposant vingt chevaux. Nombre de tiercés dans l'ordre possibles :* $A_{20}^3 = 20.19.18 = 6840$.

Corollaire 25 *Le nombre d'injections d'un ensemble* E *à* p *éléments vers un ensemble* F *à* n *éléments* $(p \leq n)$ *est* A_n^p.
Si $n = p$, *le nombre de bijections de* E *vers* F *est* $n!$.

Soient A l'ensemble des injections de E vers F et B l'ensemble des p-arrangements de F.
L'application $\phi : A \longrightarrow B,\ f \longmapsto (f(a_1), \cdots, f(a_p))$ est une bijection.

Exemple 26 *Nombre d'arrivées possible d'une course de huit coureurs s'il n'y a pas d'exaequo :* $8! = 40320$ *arrivées possibles.*

2.4 Combinaisons

Définition 27 *Soit* E *un ensemble fini de cardinal* n *et* $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$. *Une* p*-combinaison de* E *est une partie à* p *éléments de* E. *Le nombre de* p*-combinaisons de* E *est noté* $\binom{n}{p}$ *ou* C_n^p.

Théorème 28 *Le nombre de* p*-combinaisons d'un ensemble fini de cardinal* n *avec* $p \leq n$ *est*
$\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

On note $\mathcal{A}(n,p)$ (respectivement $\mathcal{C}(n,p)$) l'ensemble des p-arrangements (respectivement des p-combinaisons) de E. On définit l'application
$\psi : \mathcal{A}(n,p) \longrightarrow \mathcal{C}(n,p),\ (a_1, \cdots, a_p) \longmapsto \{a_1, \cdots, a_p\}$. Une telle p-combinaison admet $p!$ antécédents, on a donc : $p!\,|\mathcal{C}(n,p| = |\mathcal{A}(n,p)|$.

Exemple 29 *1) Nombre de tiercés dans le désordre avec vingt chevaux au départ.*
$\binom{20}{3} = \dfrac{20.19.18}{6} = 1140$.
2) On tire 8 cartes d'un jeu de 32 cartes.
a) Nombre de tirages possibles : $\binom{32}{8} = 10\,518\,300$.
b) Nombre de tirages contenant deux rois : Choix des rois : $\binom{4}{2}$, *choix des autres cartes :* $\binom{28}{6}$,
soit $\binom{4}{2}\binom{28}{6} = 6.376\,740 = 2\,260\,440$.
c) Nombre de tirages ne contenant aucun roi : $\binom{28}{8} = 3\,108\ 105$.
d) Nombre de tirages contenant au moins un roi : $\binom{32}{8} - \binom{28}{8} = 7\,410\,195$.
e) Nombre de tirages contenant deux carrés : $\binom{8}{2} = 28$.

Propriétés des combinaisons

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \ \binom{n}{1} = n.$

b) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

c) $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \ 1 \leq p \leq n.$

Rappel : Formule du binôme

Soien a et b des nombres complexes ou des éléments d'un anneau qui commutent ($a.b = b.a$), on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}.$

Exemple 30 *soit E un ensemble fini de cardinal n, $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$ s'obtient par :*

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$

Exercice

$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$

On note $E = [\![1, 2n]\!], \ A = [\![1, n]\!], \ B = [\![n+1, 2n]\!]$

$E(n,k) =$ ensemble des parties de E contenant k elements de A et $n-k$ elements de B.

$\mathcal{C}(2n, n) = \bigcup_{k=0}^{n} E(n,k)$ d'où $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ où $\mathcal{C}(2n,n)$ est l'ensemble des parties à n éléments de E.