DETERMINANTS

1 Groupe symétrique

1.1 Définition

Définition 1 *On appelle $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur lui même. il y en a $n!$.*

<u>notation</u>
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n$

Exemple 2 *$n = 4$.*
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
$\sigma' \circ \sigma$ *est noté* $\sigma'\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 3 *$(\mathcal{S}_n, \circ)$ a une structure de groupe appelé groupe symétrique d'ordre n. Il n'est pas commutatif si $n > 2$.*
L'élément $\sigma' \circ \sigma$ est noté $\sigma'\sigma$.

1.2 Transpositions, cycles

Définition 4
1. *Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$.*
   Une transposition τ est un élément de $\mathcal{S}_n$ défini par : $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\forall x \notin \{i,j\}$, $\tau(x) = x$. Cette transposition est notée $\tau = (i,j)$
2. *Soient $x_1, x_2, \cdots, x_p$ p éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Un p-cycle ou cycle d'ordre p est un élément σ de $\mathcal{S}_n$ défini par :*
   $\forall x \notin \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$, $\sigma(x) = x$, $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $\sigma(x_i) = x_{i+1}$, et $\sigma(x_p) = x_1$.
   Ce p-cycle est noté $\sigma = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$. L'ensemble $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ est appelé support du p-cycle. Un n-cycle est appelé permutation circulaire.

Remarque 5 *1) Une transposition est un 2-cycle. $(i,j)(i,j) = Id_{[\![1,n]\!]} = Id$.*
2) Deux cycles de supports disjoints commutent. $n = 6$, $(1,2,3)(4,6) = (4,6)(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Exemple 6 *n=3,* $(1,2)(1,3) = (1,3,2)$, $(1,3)(1,2) = (1,2,3)$ *ces transpositions ne commutent pas, leurs supports ont 1 en commun.*

Proposition 7 *1) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ On définit sur $[\![1,n]\!]$ la relation $xR_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ y = \sigma^k(x)$. Cette relation est une relation d'équivalence sur $[\![1,n]\!]$.*
2) Soit $x \in [\![1,n]\!]$. Il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $x, \sigma(x), \cdots, \sigma^{p-1}(x)$ sont deux à deux distincts et que $\sigma^p(x) = x$. La classe d'équivalence de x pour la relation R_σ est l'ensemble $\{x, \sigma(x), \cdots, \sigma^{p-1}(x)\}$ elle est appelée orbite de x pour la permutation σ.

Proposition 8 *1) Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est un produit de transpositions.*
2) Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est un produit de cycles disjoints.

Dans 2 les supports des cycles sont constitués par les classes d'équivalence pour la relation R_σ.

Exemple 9 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (1,4,5)(2,6,8,7)$, *les éléments invariants (ici 3) ne sont pas précisés dans le produit.*

1.3 Signature d'une permutation

Définition 10 *1) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ est une inversion de σ si $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$. On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ.*
2) La signature de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est définie par $\epsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1,1\}$.
3) Une permutation est paire (respectivement impaire) si $\epsilon(\sigma) = 1$ (respectivement -1).

Proposition 11 *L'ensemble des permutations paires est un sous groupe de $\mathcal{S}_n$ appelé groupe alterné et noté $\mathcal{A}_n$.*

Exemple 12 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$ *sont les inversions de σ. $I(\sigma)=4$, $\epsilon(\sigma)=1$, σ est une permutation paire de $\mathcal{S}_4$.*

Proposition 13 *1) Si τ est une transposition, $\epsilon(\tau) = -1$.*
2) $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathcal{S}_n$ on a $\epsilon(\sigma_1, \sigma_2) = \epsilon(\sigma_1)\,\epsilon(\sigma_2)$, autrement dit ϵ est un morphisme de groupes entre $(\mathcal{S}_n,\ \circ)$ et $(\{-1,1\},\times)$ et $\mathcal{A}_n = \ker \epsilon$.

Exemple 14 *1) $\mathcal{S}_2 = \{Id,(1,2)\}$, $\mathcal{A}_2 = \{Id\}$.*
2) $\mathcal{S}_3 = \{Id,(1,2),(1,3),(2,3),(1,2,3),(1,3,2)\}$, $\mathcal{A}_3 = \{Id,(1,2,3),(1,3,2)\}$.

2 Formes p-linéaires

2.1 Définition

soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 15 *Une forme p-linéaire sur E est une application $f : E^p \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :*

$$\forall (a_1,a_2,\cdots,a_p) \in E^p,\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ f_i : \begin{cases} E & \longrightarrow \quad \mathbb{K} \\ x & \longmapsto \quad f(a_1,\cdots,a_{i-1},x,a_{i+1},\cdots,a_p) \end{cases} \text{ est linéaire.}$$

Exemple 16 *1) $E=\mathbb{R}^2$ $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$ est une forme bilinéaire sur E.*
2) E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 2 et (e_1,e_2) une base de E. L'application :

$$(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \longmapsto x_1y_2 - x_2y_1$$

est une forme bilinéaire sur E.
3) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application $(A,B) \longrightarrow Tr(AB)$ est une forme bilinéaire sur E.
4) $E=\mathbb{K}$, $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x_1,x_2,\cdots,x_p) \longmapsto \prod_{i=1}^p x_i$ est une forme p-linéaire sur $\mathbb{K}$.
5) $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, $\phi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est une forme bilinéaire sur E.

2.2 Expression d'une forme p-linéaire dans une base de E

Applications bilinéaires
Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de E.
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_ie_i,\ y = \sum_{j=1}^n b_je_j$, on obtient si f forme bilinéaire sur E :
$f(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_ib_jf(e_i,e_j)$.
Cas général
Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est une base de E et f une forme p-linéaire sur E.
$x_j = \displaystyle\sum_{i_j=1}^n a_{i_j\,j}\ e_{i_j},\ j \in [\![1,p]\!]$.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_p) = \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_p\le n} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_pp}f(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_p}).$$

2.3 Formes p-linéaires alternées

Soit f une forme p-linéaire sur E. On définit, si $\sigma \in \mathcal{S}_p$
$\sigma f : E^p \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \longmapsto f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(p)})$, cest une forme p linéaire sur E.

Définition 17 *La forme p-linéaire f sur E est :*
Antisymétrique si $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in E^p$, $\sigma f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \epsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$.
Alternée si $x_i = x_j$, $i \neq j \Longrightarrow f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = 0$.

Proposition 18 *1) Une forme p-linéaire f sur E est antisymétrique si et seulement si $\tau f = -f$ pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_p$.*
2) Une forme p-linéaire f sur E est alternée si et seulement elle est antisymétrique.

On définit la forme bilinéaire sur E par $g(x, y) = f(x_1 \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, , x_p)$. Si f est alternée, $g(x + y, x + y) = 0 = g(x, y) + g(y, x)$.
Réciproquement si elle est antisymétrique, $g(x, x) = -g(x, x) \Longrightarrow g(x, x) = 0$.

Proposition 19 *soit f une forme p-linéaire alternée sur E. Si les vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sont liés alors $f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = 0$.*

Conséquence $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est inchangé si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.

2.4 Expression d'une forme n-linéaire alternée en dimension n

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et f une forme n-linéaire alternée sur E.
en utilisant les résultats de 2.2 on obtient : $x_j = \displaystyle\sum_{i_j=1}^{n} a_{i_j\, j}\, e_{i_j}$, $j \in [\![1, n]\!]$.

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_n \leq n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}).$$

en considérant l'application $\phi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$, $j \longmapsto i_j$ en en notant $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$ on obtient :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\phi \in \mathcal{F}} a_{\phi(1)1} a_{\phi(2)2} \cdots a_{\phi(n)n} f(e_{\phi(1)}, e_{\phi(2)}, \cdots, e_{\phi(n)}).$$

Si l'application ϕ nest pas injective, il existe i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$ tels que $\phi(i) = \phi(j)$ ce qui entraine $f(e_{\phi(1)}, e_{\phi(2)}, \cdots, e_{\phi(n)}) = 0$. la somme peut donc être prise sur les ϕ injectives donc bijectives, c'est à dire les permutations de $\mathcal{S}_n$.
On a alors, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) f(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ ce qui entraine :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\sum_{\phi \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\phi) a_{\phi(1)1} a_{\phi(2)2} \cdots a_{\phi(n)n} \right) f(e_1, e_2, \cdots, e_n).$$

3 Déterminants

On note $\Lambda^{*p}(E)$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur le $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. C'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{E^p}$ ensemble des application de E^p vers $\mathbb{K}$.

3.1 Théorème

Théorème 20 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.*
1) L'espace $\Lambda^{*n}(E)$ est de dimension 1.
2) Il existe une unique forme linéaire alternée, notée $det_{\mathcal{B}}$ telle que : $det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

En reprenant les notations précédentes et en notant : $det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\phi \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\phi) a_{\phi(1)1} a_{\phi(2)2} \cdots a_{\phi(n)n}$, on a si $f \in \Lambda^{*n}(E)$:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\sum_{\phi \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\phi) a_{\phi(1)1} a_{\phi(2)2} \cdots a_{\phi(n)n} \right) f(e_1, e_2, \cdots, e_n) = det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, f(e_1, e_2, \cdots, e_n) =$$

$A\, det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ avec $A = f(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. ce qui montre que tous les éléments de $\Lambda^{*n}(E)$ sont proportionnels à $det_{\mathcal{B}}$.

3.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 21 *Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$, $\ x_j = \sum_{i_j=1}^{n} a_{i_j\, j}\, e_{i_j}$, $\ j \in [\![1, n]\!]$. Le déterminant de cette famille de n vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ est :*

$$det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\phi \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\phi) a_{\phi(1)1} a_{\phi(2)2} \cdots a_{\phi(n)n}.$$

Remarque 22 *Soit $\mathcal{B}'$ une deuxième base de E. $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto det_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Lambda^{*n}(E)$ c'est une forme linéaire alternée proportionlle à $det_{\mathcal{B}}$:*

$$\exists \mu \in \mathbb{K},\ det_{\mathcal{B}'} = \mu\, det_{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n,\ det_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mu\, det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

On a en particulier $\mu = det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ et $\underline{det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\, det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1}$

3.3 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 23 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, appelé déterminant de u et noté $det(u)$ tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E on ait :*

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n,\ det_{\mathcal{B}}(u(x_1), u(x_2), \cdots, u(x_n)) = \lambda\, det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

$det(u) = det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}) = det_{\mathcal{B}}(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n))$ est indépendant de la base choisie

Exemple 24 *1) $det(Id_E) = 1$.*
2) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique $P = Vect(e_1, e_2)$ $D = \mathbb{R}e_3$. On appelle s la symétrie par rapport P parallèlement à D. $det(s) = det_{\mathcal{B}}(s(e_1), s(e_2), s(e_3)) = det(e_1, e_2, -e_3) = -1$.

3.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 25 *Le déterminant de la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, il est noté $det(A)$.*

<u>Notation</u>
$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Il ne faut pas confondre cette notation, qui représente un scalaire, avec la notation de matrice.

Proposition 26 $det(A) = \sum_{\phi \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\phi) a_{\phi(1)1} a_{\phi(2)2} \cdots a_{\phi(n)n}$.

Proposition 27 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$,, $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, *où* $\mathcal{B}$ *est une base de* E. $det(u) = det(A)$

$det(u) = det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = det(A)$.

3.5 Propriétés des déterminants

Proposition 28 *Soit* $\mathcal{B}$ *base de* E. *La famille* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$ *est une autre base de* E *si et seulement si* $det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$.

Si la famille $\mathcal{B}' = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de E on a $det_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1 = det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\, det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ce qui montre que $det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$.
Réciproquement si les vecteurs sont liés le déterminant est nul.

Proposition 29 *Soient* $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
$det(\lambda u) = \lambda^n det(u)$.
$det(u \circ v) = det(u)\, det(v)$.

Corollaire 30 *Soient* $\lambda \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.
$det(AB) = det(BA) = det(A)\, det(B)$.

Proposition 31 *soit* $u \in \mathcal{L}(E)$, u *est un automorphisme de* E *si et seulement si* $det(u) \neq 0$. *Dans ce cas,* $det(u^{-1}) = \dfrac{1}{det(u)}$.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible si et seulement si* $det(A) \neq 0$ *et dans ce cas* $det(A^{-1})\dfrac{1}{det(A)}$

Soit $\mathcal{B}$ base de E. $u \in GL(E) \Longleftrightarrow u(\mathcal{B})$ base de $E \Longleftrightarrow det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \neq 0$.

Proposition 32 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $det({}^tA) = det(A)$.

3.6 Calcul d'un déterminant

Rappel
Un déterminant est nul si deux colonnes ou deux lignes sont égales ou proportionnelles.
Un déterminant est nul si une colonne (respectivement une ligne) est combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement des autres lignes).
Un déterminant est inchangé en ajoutant à une colonne (respectivement à une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement des autres lignes).
Une permutation de colonnes ou de lignes change un déterminant en son opposé.

Exemple 33 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne
$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Proposition 34 *Soit* $A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *où* $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. *On a :*

$det(A) = a_{nn}\, det(A')$.

Corollaire 35 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. On a* $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

C'est immédiat pour $n = 2$ et se montre par récurrence à partir du résultat précédent.

Exemple 36 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$

$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$. *Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.*

Définition 37 *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
On appelle mineur du coefficient a_{ij} le déterminant Δ_{ij} d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de A.
On appelle cofacteur du coefficient a_{ij} le scalaire $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, \Delta_{ij}$.

Théorème 38 *Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}(-1)^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} : \textit{ développement suivant la } j-\textit{ième colonne} \\ \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}(-1)^{i+j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} : \textit{ développement suivant la } i-\textit{ième ligne} \end{aligned}$$

Exemple 39 *1) développement suivant la deuxième ligne.*
$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.
2) déterminant de Vandermonde.
soit $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On considère le déterminant d'ordre $n+1$:

$$V(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_o^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

La démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas $n = 2$ a été traité dans l'exemple 36.

Définition 40 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs $\widetilde{A} = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$*

Théorème 41 *1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a ${}^t\widetilde{A}\, A = A\, {}^t\widetilde{A} = \det(A)\, I_n$.*
2) Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $\widetilde{A} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t\widetilde{A}$

3.7 Formules de cramer

$$\begin{aligned} (S) \quad &: \quad AX = B \text{ où } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (S) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j C_j = B \text{ où } C_j \text{ est la } j\text{ème colonne de } A. \end{aligned}$$

Définition 42 *On dit que le système* (S) *est de Cramer si* $p = n$ *et si* A *est inversible. Le système a une solution unique.*

Théorème 43 *Si* (S) *est de Cramer alors le* n*-uplet des solutions est donné par*

$$x_i = \frac{\det_{\mathcal{B}}(C_1, ...C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n)}{\det A},\ i \in [\![1, n]\!]$$

3.8 Diagonalisation

Soit E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, soit f un endomorphisme de E et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 44 $\lambda \in \mathbb{K}$ *est une valeur propre de* f *si il existe un vecteur non nul* x *de* E *tel que* $f(x) = \lambda x$.
x *est appelé vecteur propre associé à la valeur propre* λ.
λ *est une valeur propre de* A *si il existe une matrice colonne non nulle* X *tel que* $AX = \lambda X$.

Proposition 45

$$\begin{array}{rcl} \lambda \textit{ est une valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\} \\ \lambda \textit{ est une valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \det(f - \lambda Id_E) = 0 \\ \lambda \textit{ est une valeur propre de } A & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{array}$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ *est* $E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E)$. *C'est un sous espace vectoriel de* E.

Définition 46 *L'endomorphisme* f *de* E *est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres. Sa matrice dans cette base est diagonale.*
La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement asssocié à* A *est diagonalisable.*

On appelle polynome caractéristique de f le polynome P de $\mathbb{K}[X]$ de fonction polynôme associée définie par $P(x) = \det(f - xId_E)$
On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ de fonction polynôme associée définie par $P(x) = \det(A - xI_n)$.

Proposition 47 *Les valeurs propres de* f *sont les racines du polynome caractéristique de* f.
Les valeurs propres de A *sont les racines du polynome caractéristique de* A.