ESPACES VECTORIELS

Dans toute la suite $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Introduction

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1 *Soit* $\begin{cases} E \text{ un ensemble non vide} \\ + \text{ une loi interne sur } E \\ . \text{ une loi externe sur } E \text{ c'est à dire une application de } K \times E \text{ dans } E \end{cases}$

on dit que le triplet $(E, +, .)$ ***est un** K **espace vectoriel** si* $\begin{cases} 1)\ (E,+) \text{ est un groupe commutatif} \\ 2)\ \forall (u,v) \in E^2 \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v \\ 3)\ \forall u \in E \quad \forall (\alpha,\beta) \in K^2 \quad (\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u \\ 4)\ \forall u \in E \quad \forall (\alpha,\beta) \in K^2 \quad (\alpha\beta).u = \alpha.(\beta.u) \\ 5)\ \forall u \in E \quad 1.u = u \end{cases}$

*Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de K des **scalaires**.*

Exemple 1 *1) $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel*
2) $(\mathbb{C}^n, +, .)$ est à la fois un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et un $\mathbb{C}$ espace vectoriel
3) $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{X}} = \{$ applications d'un ensemble X dans $\mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. On note parfois $\theta_X : X \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto 0$ c'est l'application nulle.
4) $\mathcal{F}(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\mathbb{X}} = \{$ applications d'un ensemble X dans $\mathbb{C}\}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel
5) l'ensemble des suites réelles, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel
6) l'ensemble des suites complexes, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel
7) $\mathbb{R}[X] = \{$ fonctions polynomes à coefficients dans $\mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Proposition 1
1) $\forall x \in E \quad 0_K.x = 0_E$
2) $\forall \lambda \in K \quad \lambda.0_E = 0_E$
3) $\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_K \quad ou \quad x = 0_E$
4) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in K \quad (-\lambda).x = -(\lambda.x)$

Proposition 2 1) Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$espaces vectoriels, on définit sur $E_1 \times E_2$ une loi interne et une loi externe en posant $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\alpha.(x, y) = (\alpha.x, \alpha.y)$
$E_1 \times E_2$ muni de ces deux lois est un Kespace vectoriel. On peut généraliser au produit de n $\mathbb{K}$espaces vectoriels :
2) $E_1, E_2, \cdots, E_n$ étant n $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels, on définit la somme sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ composante par composante et la multiplication externe par $\mu \in \mathbb{K}$ en multipliant (externe) par μ chauqe composante. Ceci confère à ce produit cartésien d'espaces vectoriels une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel appelé espace vectoriel produit. Les exemples 1 et 2 en sont des cas particuliers.

1.2 Sous espaces vectoriels

Soit $(E, +, .)$ un Kespace vectoriel

Définition 2 *Soit A une partie non vide de E, on dit que A est un **sous-espace vectoriel** de E si*
1) A est stable pour les lois $+$ et $.$ cad $\forall (u, v) \in A^2 \quad \forall \lambda \in K \quad u + v \in A$ et $\lambda.u \in A$ qui est équivalent à :
2) les restrictions des lois à $A \times A$ et à $K \times A$ munissent A d'une structure de Kespace vectoriel

Remarque 1 *Si A est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in A$*

Proposition 3 A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\begin{cases} 1)\ 0_E \in A \\ 2)\ \forall (u,v) \in A^2 \quad u+v \in A \\ 3)\ \forall u \in A \quad \forall \lambda \in K \quad \lambda.u \in A \end{cases}$

Remarque 2 *A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si* $\begin{cases} 1)\ 0_E \in A \\ 2)\ \forall (u,v) \in A^2 \quad \forall (\alpha,\beta) \in K^2 \quad \alpha.u + \beta.v \in A \end{cases}$

Exemple 2 *1.* $E \qquad A = \{0\} \qquad A = E$

2. $E = \mathbb{R}^2 \quad A = \{0\} \qquad A = \{(x, y) \qquad 2x + 3y = 0\} \qquad A = \mathbb{R}^2$

3. $E=\mathbb{R}[X]$, $A=\mathbb{R}_n[X]=\{$ *fonctions polynomes à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *de degré inférieur ou égal à* $n\}$
4. E *un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel,* $A=\mathbb{K}\,a=\{\lambda a|\lambda\in\mathbb{K}\}$ *est un sous espace vectoriel appelé droite vectorielle engendrée par* a.

5. $E=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, *A ensemble des suites convergentes est un sous espace vectoriel de E.*
6. $E=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $a,b\in\mathbb{K}$, *A ensemble des suites* (u_n) *vérifiant :* $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+2}=a\,u_{n+1}+b\,u_n$ *est un sous espace vectoriel de E.*

Proposition 4 L'intersection d'une famille finie ou infinie de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel

Proposition 5 La réunion de deux sous espaces vectoriels V_1 et V_2 de E est un sous espace vectoriel si et seulement si $V_1\subset V_2$ ou $V_2\subset V_1$.
$\{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\quad \mathbf{u}_1\in\mathbf{V}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbf{V}_2\}$ est un sous espace vectoriel de E, c'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant $V_1\cup V_2$ on le note $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$

1.3 Combinaisons linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$espace vectoriel

Définition 3 *Soit A une partie de E. On appelle* ***combinaison linéaire*** *des éléments de A tout élément de E de la forme* $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k$ *avec* $p\in\mathbb{N}^*$ *et* $\forall k\in\{1,....,p\}\ \ \lambda_k\in K\ \ u_k\in A$
Attention : A peut être infinie mais le nombre d'éléments dans la somme est finie, ce qui revient à dire que seul un nombre fini de λ_k *est non nul.*

Exemple 3 $E=\mathbb{R}^3$.*Soient* $u=(2,-1,3)$, $v=(-1,2,-4)$ *et* $w=(4,1,1)$. *Montrer que w est une combinaison linéaire de u et v.*

Proposition 6 Soit A une partie non vide de E , l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A est un sous espace vectoriel de E, on l'appelle **espace vectoriel engendré par** A et on le note $Vect(A)$. On définit de même le sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de E.

Proposition 7 $Vect(A)$ est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant A.

Remarque 3 *1) Soient u et v deux vecteurs de E* $\quad Vect(u,v)=Vect(u+v,u-v)$.
2) Soit $u\in E$ *et* $\lambda\in K\backslash\{0\}$ $\quad Vect(\lambda u)=Vect(u)$
3) Soit V un sous espace vectoriel de E et $(u_1,...,u_p)$ *une famille de vecteurs de E*

$$Vect(u_1,..,u_p)\subset V\Longleftrightarrow\forall i\in\{1,..,p\}\ \ u_i\in V$$

4) Par convention on pose $Vect(\emptyset)=\{0_E\}$

2 Applications linéaires

Dans toute la suite E , F,G sont des $\mathbb{K}$espaces vectoriels

2.1 Définitions

Définition 4 *Soit f une application de E dans F on dit que f est* ***linéaire*** *si*

$$\forall(x,y)\in E^2\ \ \forall(\alpha,b)\in\mathbb{K}^2\quad f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ ***l'ensemble des applications linéaires*** *de E dans F.*

Remarque 4 $f\in\mathcal{L}(E,F)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1)\ \forall(x,y)\in E^2\quad f(x+y)=f(x)+f(y)\\ 2)\ \forall x\in E\ \ \ \forall\alpha\in\mathbb{K}\quad f(\alpha x)=\alpha f(x)\end{array}\right.$

Remarque 5 $f\in\mathcal{L}(E,F)\Longleftrightarrow\forall(x_1,....,x_p)\in E^p\ \ \forall(\alpha_1,....,\alpha_p)\in\mathbb{K}^p\quad f(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k)=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k f(x_k)$. *L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.*

Remarque 6 *Si* $f\in\mathcal{L}(E,F)$ *alors* $f(0_E)=0_F$

Définition 5 *Si $f \in \mathcal{L}(E, E)$ on dit que f est un* ***endomorphisme*** *de E et on note $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(\mathbf{E})$*
Si $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ on dit que f est une ***forme linéaire*** *sur E , on note $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \mathbf{E}^*$ et on l'appelle l'****espace dual*** *de E.*

Exemple 4 *1) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda id_E \in \mathcal{L}(E)$, c'est l'homothétie vectorielle de rapport λ.*
2) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (2x - y, 3x - 5y) \in \mathbb{R}^2$
3) $E = \{$suites réelles$\}$ $\tau : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \to (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$ τ est appelé ***opérateur de translation***
4) $E = \{$suites réelles$\}$ $\Delta : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \to (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$ Δ est appelé ***opérateur de différence***
4) $D : f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
5) $I : f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \to \int_0^1 f(t)dt$

Proposition 8 $(\mathcal{L}(E, F), +, .)$ est un Kespace vectoriel

2.2 Image noyau

Proposition 9 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$
E_1 est un sous espace vectoriel de $E \Rightarrow f(E_1)$ est un sous espace vectoriel de F
F_1 est un sous espace vectoriel de $F \Rightarrow f^{-1}(F_1)$ est un sous espace vectoriel de E

Définition 6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on appelle* ***noyau*** *de f l'ensemble des antécédents de 0_F et on le note $\ker f$, on appelle* ***image*** *de f l'ensemble des images des éléments de E et on le note Imf*

$$\ker f = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\} \quad Imf = \{f(x)\,,\, x \in E\}$$

Théorème 1 *$\ker f$ et Imf sont des sous espaces vectoriels respectivement de E et de F.*

Théorème 2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ $\quad f$ injective $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_E\}$*

Remarque 7 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ $\quad f$ surjective $\Longleftrightarrow Imf = F$*

Exemple 5 *Déterminer $\ker f$ et Imf pour chacun des exemples précédents*

Remarque 8 *si f est linéaire on a :$f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(u_k)$ que l'on peut traduire par : L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.*

2.3 Composée d'applications linéaires

Théorème 3 *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $gof \in \mathcal{L}(E, G)$*

Théorème 4
$(\mathcal{L}(E), +, .)$ est un Kespace vectoriel
$(\mathcal{L}(E), +, o)$ est un anneau
$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 \qquad \forall \lambda \in K \qquad \lambda.(fog) = (\lambda.f)og = fo(\lambda.g)$

*On dit que $(\mathcal{L}(E), +, ., o)$ est une K****algèbre****.*

Remarque 9 *La formule du binôme est valable pour deux endomorphismes f et g qui commutent ($f \circ g = g \circ f$) en particulier pour f et id_E :*

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k o g^{n-k}$$

Théorème 5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.Si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ on dit alors que f est un* ***isomorphisme*** *de E sur F.*

Définition 7 *Tout isomorphisme de E dans E est appelé* ***automorphisme****, l'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.*

Théorème 6 *$GL(E)$ muni de la loi o est un groupe appelé* ***groupe linéaire*** *de E*

Exercice 1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 - 2f + id_E = 0$. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.

Exemple 6 *Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$.*
$(id_E - 3f)^2 = id_E - 6f + 9f^2$.
$(f + g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$ si f et g ne commutent pas, sinon $(f + g)^2 = f^2 + 2f \circ g + g^2$.

3 Somme de sous espaces vectoriels

Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

3.1 Définitions

Définition 8 $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 | (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2\}$.

Proposition 10 1) L'application $\phi : \begin{cases} E_1 \times E_2 \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2) \longmapsto & x_1 + x_2 \end{cases}$ est une application linéaire et $\mathrm{Im}\phi = E_1 + E_2$ est donc un sous espace vectoriel de E.
2) $E_1 + E_2$ est le sous espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$.

Définition 9 *La somme $E_1 + E_2$ est directe si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, on la note $E_1 \oplus E_2$ dans ce cas.*

Proposition 11 Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) La somme $E_1 + E_2$ est directe.
2) Pour tout $x \in E_1 + E_2$ il existe un couple unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
3) L'application ϕ est injective.

3.2 Sous espaces vectoriels supplémentaires

Définition 10 *Les sous espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si $E = E_1 \oplus E_2$.*

Proposition 12 1) Les sous espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
2) Les sous espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3.3 Sommes d'un nombre fini de sous espaces

Soient $E_1, E_2, \cdots E_p$ $p \geq 2$ sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

Définition 11 *1) $E_1 + E_2 + \cdots + E_p = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_p | (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p\}$.*
2) La somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe si pour tout $x \in E_1 + E_2 + \cdots + E_p$, il existe un p-uplet unique $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$.
On la note alors $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$.

4 Projecteurs et involutions

Soient E_1et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E

Définition 12 *On appelle **projection** sur E_1 parallèlement à E_2 l'application p_1 qui à tout vecteur x de E tel que $x = x_1 + x_2$ avec x_i appartient à E_i associe le vecteur x_1.*

Proposition 13
$$\begin{array}{ll} p_i \in \mathcal{L}(E) & \\ p_i^2 = p_i & \\ \mathrm{Im} p_1 = E_1 & \ker p_1 = E_2 \\ p_1 + p_2 = id & p_1 o p_2 = p_2 o p_1 = 0 \end{array}$$

Exemple 7 *Déterminer les projections p_1 dans chacun des exemples précédents.*

Définition 13 *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ on dit que p est un **projecteur** si $p^2 = p$*

Théorème 7 *p est un projecteur si et seulement si il existe deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 tels que p soit la projection sur E_1 parallèlement à E_2, autrement dit il y a équivalence entre les définitions de projecteur et de projection.*

Proposition 14 Soient p_1 et p_2 deux projecteurs tels que $p_1 + p_2 = id$ alors $\mathrm{Im} p_1 = \ker p_2$ et $\mathrm{Im} p_2 = \ker p_1$

Définition 14 *On appelle **symétrie** par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application s_1 qui à tout vecteur x de E tel que $x = x_1 + x_2$ avec x_i appartient à E_i associe le vecteur $x_1 - x_2$.*

Proposition 15 $s_1 = p_1 - p_2 = 2p_1 - id$
$s_1 \in \mathcal{L}(E)$
$s_1^2 = id$

Exemple 8 *Déterminer la symétrie s_1 dans l'exemple précédent.*

Définition 15 *Soit $s \in E^E$ On dit que s est une involution si $s^2 = id$, s peut ne pas être linéaire dans cette définition.*

Théorème 8 *Soit s est une involution linéaire, en posant $E_1 = \ker(s - id)$ et $E_2 = \ker(s + id)$, s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à $E_{2.}$ Il y adonc équivalence entre involution linéaire et symétrie.*

Proposition 16 s symétrie$\Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}(s + id)$ projecteur

5 Formes linéaires et hyperplans

Définition 16 *Un hyperplan d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel est un sous espace vectoriel qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire.*

Propriétés 17 1) toute forme linéaire non nulle est surjective.
2)Un sous espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement si :

$$\forall \alpha \in E - H,\ E = H \oplus K\,\alpha.$$

Proposition 18 Un sous espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle $u \in E^*$ telle que $H = \ker u$

6 Géométrie affine

6.1 Définitions

Lorsque l'on fait de la géométrie affine sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel E :
— les éléments de E sont appelés des points,
— si A et B sont deux points de E, on désigne par $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $B - A$
— on note O le point 0. Muni de cette structure E est appelé espace affine.
On dispose des propriétés suivantes :
— $\forall (A, B, C) \in E^3$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ encore appelée relation de Chasles
— $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \ \forall A \in E,\ \ \exists! B \in E$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

Propriétés 19
1. $A = B \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = 0_E$.
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
3. $B = A + \overrightarrow{u} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
4. $\forall A, B, C \in E,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

6.2 Translations

Définition 17 *On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ sur l'espace affine E l'application de E dans E, notée $t_{\overrightarrow{u}}$ définie par $A \longmapsto B = A + \overrightarrow{u}$.*
$t_{\overrightarrow{u}}(M) = N \Longleftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u}$.

Propriétés 20
1. $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}$.
2. $t_{\overrightarrow{u}} = Id_E \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = 0_E$.
3. $t_{\overrightarrow{u}}$ est bijective et $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$.

6.3 Sous-espace affine

Définition 21 Une partie $\mathcal{F}$ de E est appelée sous espace affine de E si il existe un point A de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = \{A + \overrightarrow{u} \ \ , \overrightarrow{u} \in F\} \text{ noté } A + F$$

On dit alors que $\mathcal{F}$ est un sous espace affine passant par A et de direction F.

Lemme 1 *Soient $A, A' \in E$ et F, F' deux sous espaces vectoriels de E. On a $A + F = A' + F' \Longleftrightarrow F = F'$ et $\overrightarrow{AA'} \in F$.*

Proposition 22 Soit $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine passant par A et de direction F, on a :

$$\forall B \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = B + F$$

Exemple 9 *1) L'ensemble $\mathcal{F} = \{(1+t, 3-2t, -1+3t) | t \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $A = (1, 3, -1)$ et de direction la droite vectorielle $D = \mathbb{R}\,(1, -2, 3)$, $\mathcal{F}$ est une droite affine de $\mathbb{R}^3$.*
2) $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 2\}$ est un sous espace afffine de $\mathbb{R}^3$ passant par $A = (2, 0, 0)$ et de direction
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$, c'est un plan affine de $\mathbb{R}^3$

Proposition 23 soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous espaces affines de E de directions respactives F et G.
Soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$
Soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous espace affine de direction $F \cap G$.

Proposition 24 1) Soit $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = B + G$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F + G$.
2) Soit $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = B + G$ deux sous espaces affines de E tels que $E = F \oplus G$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un point.

Définition 25 Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous espaces affines de directions respectives F et G, on dit que :
$\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ si $F \subset G$,
$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles si $F = G$.

Proposition 26 1) Si $\mathcal{F}$ est paralèle à $\mathcal{G}$ alors soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.
2) Deux sous espaces affines parallèles sont disjoints ou confondus.

Proposition 27 Soient E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $b \in F$, l'ensemble $\mathcal{F}_b$ des solutions de l'équation $u(x) = b$, ensemble des antécédents de b, est soit vide, soit un sous espace affine de E de direction $\ker u$.

sub

7 Barycentre

Théorème-définition 28 Soit $(A_1, ...A_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$
1) Il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$, ce point est appelé barycentre des points $(A_1, ...A_n)$ affectés des coefficients $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
2) Le barycentre G vérifie

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

Proposition 29 Associativité du barycentre. On peut remplacer k des n points par leur barycentre (s'il existe), affectés de la somme de leurs coefficients.

Proposition 30 Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de E, tout barycentre de point de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.

Définition 31 Soit $(A, B) \in E^2$, on appelle segment $[A, B]$ l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs.

$$M \in [A, B] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1] \text{ tel que } M = tA + (1-t)B$$