Espaces vectoriels de dimension finie

1 Familles libres, familles génératrices, bases

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Familles génératrices

Définition 1 *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est une famille **génératrice** de E si $E = Vect(u_i)_{i\in I}$.*

$$\forall x \in E,\ \exists(\lambda_i)_{i\in I}\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i\, u_i$$

les λ_i, $i \in I$ étant presque tous nuls c'est à dire tous nuls sauf au plus un nombre fini d'entre eux, ce qui entraine que la somme précédente est finie même si I est infini.

Exemple 1 *1) $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel.*
2) $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
3) $(e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e3 = (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$.
4) Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1))$ est une famille génératrice.
5) $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
6) $(1, X, X^2, \cdots, X^n, \cdots)$, famille infinie est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$. Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est combinaison linéaire d'un nombre fini de termes de cette famille.

Remarque 1 *Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice*

1.2 Familles libres, familles liées.

Définition 2 *On dit que la famille $(u_1, ..., u_p)$ de vecteurs de E est **liée** si il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = 0$. On dit aussi que les vecteurs sont **linéairement dépendants**. Si la famille (u_1, u_2) est liée on dit que les vecteurs u_1, u_2 sont **colinéaires.***
*On dit que la famille $(u_1, ..., u_p)$ de vecteurs de E est **libre** si elle n'est pas liée. On dit aussi que les vecteurs sont **linéairement indépendants** ce qui s'exprime par :*

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Exemple 2
1. *$(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$.*
2. *$(e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e3 = (0, 0, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{K}^3$.*
3. *dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1))$ est une famille libre.*
4. *$(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Remarque 2 *1) Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
2) Toute famille contenant deux vecteurs colinéaires est liée.
3) Toute famille contenant une sous famille liée est liée.
4) Toute famille réduite à un vecteur non nul est libre.
5) Toute sous famille d'une famille libre est libre

Définition 3 *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si toute sous famille finie est libre.*

Exemple 3 *$(1, X, X^2, \cdots, X^n, \cdots)$, famille infinie est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.*

Proposition 1 La famille $(u_i)_{i\in I}$ est liée si il existe une sous famille finie liée.

Proposition 2
1) $(u_1, ..., u_p)$ liée $\Longleftrightarrow \exists i \in \{1, ..., p\}$ *tel que* $u_i \in Vect(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_p)$
et dans ce cas $Vect(u_1, ..., u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ..., u_p) = Vect(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_p)$
2) $(u_1, ..., u_p)$ libre $\Longleftrightarrow \forall i \in \{1, ..., p\}\quad u_i \notin Vect(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_p)$

Proposition 3 Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille libre.

$$u \in Vect(u_1, ..., u_p) \iff (u, u_1, ..., u_p) \text{ liée}$$

Proposition 4 Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une famille libre et $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, $(\mu_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ deux familles de scalaires.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i.$$

1.3 Bases

Définition 4 *On appelle **base** de E toute famille de E à la fois libre et génératrice*

Théorème 1 *La famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de la famille , les coefficients sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(u_i)_{i \in I}$*

Exemple 4

1. *$(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$.*
2. *$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e3 = (0, 0, 1)$ est une base de $\mathbb{K}^3$, elle est appelée base canonique de $\mathbb{K}^3$.*
3. *dans $\mathbb{K}^n$, la famille $e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ est une base appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.*
4. *$(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée également base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*
5. *$(1, X, X^2, \cdots X^n, \cdots)$ famille infinie, est une base de $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est combinaison linéaire d'un nombre fini de termes de cette base.*

Remarque 3 *Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On définit :*

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \end{cases}$$

$\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E)$.
ϕ est injective si et seulement $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est libre.
ϕ est surjective si et seulement $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est génératrice.
ϕ est bijective si et seulement $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une base de E.

1.4 Bases et applications linéaires

Théorème 5 Etant donné une base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E et une famille quelconque $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ du $\mathbb{K}$ espace vectoriel F, il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et une seule telle que
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = f_i$.
On a Imu=Vect$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$.
u est surjective $\iff (f_1, ..., f_n)$ famille génératrice de F
u est injective $\iff (f_1, ..., f_n)$ famille libre de F
u est bijective $\iff (f_1, ..., f_n)$ base de F

Remarque 4 *Une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2 \cdots, e_n)$, $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$*
$u = v \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = v(e_i)$.
$u \in Isom(E, F) \iff u(\mathcal{B})$ est une base de F.

2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 5 *Un $\mathbb{K}$ espace vectoriel est de dimension finie s'il a une famille génératrice finie.*

2.1 Existence d'une base

Théorème 6 Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. Toute famille libre contenue dans $\mathcal{G}$ peut être complétée à l'aide d'éléments de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base de E.

Corollaire 7 Tout $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie admet une base finie. Cette base peut être extraite de n'importe quell famille génératrice finie.

2.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 8 Soit F un sous espace vectoriel du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. Si F admet une famille génératrice à n éléments, toute famille de vecteurs de F contenant $n+1$ éléments est liée.

Corollaire 9 Si le $\mathbb{K}$ espace vectoriel E a une famille génératrice à n éléments :
1) Toute sous famille à $n+1$ éléments est liée.
2) Toute famille libre a au plus n éléments.

Théorème 10 Si E est un Kespace vectoriel de dimension fine et si $E \neq \{0_E\}$ alors E possède au moins une base et toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments, ce nombre est appelé dimension de E et noté $\dim E$. Par convention on dira que $\dim(\{0_E\}) = 0$

Exemple 5

1. *$\mathbb{K}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{K}$, de même qu'une droite vectorielle $\mathbb{K}_, a$, $a \neq \{0_E\}$.*
2. *$\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ mais de dimension 1 sur lui même. Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.*
3. *$\mathbb{K}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{K}$.*
4. *$\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$ sur $\mathbb{K}$.*
5. *Les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. C'est un plan vectoriel.*
6. *L'ensemble Les suites récurrentes linéaires d'ordre deux définies sur $\mathbb{K}$ par $\mathcal{S}_{a,b} = \{(u_n) | \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,\ (a,b) \in \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 2.*

Théorème 11 Théorème de la base incomplète.
Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée pour obtenir une base de E.

Proposition 12 Soit E un Kespace vectoriel de dimension n
Toute famille libre a au plus n éléments et toute famille génératrice a au moins n éléments.

Proposition 13 Soit E un Kespace vectoriel de dimension n

$$\begin{array}{rcl} (u_1, ...u_p) \text{ base} & \Longleftrightarrow & (u_1, ..., u_p) \text{ libre et } p = n \\ (u_1, ...u_p) \text{ base} & \Longleftrightarrow & (u_1, ..., u_p) \text{ génératrice et } p = n \end{array}$$

2.3 Sous espaces vectoriels

Proposition 14 Soit E un Kespace vectoriel de dimension n
Si F est un sous espace vectoriel de E alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, de plus il y a égalité si et seulement si $E = F$.

Exemple 6 *$E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\}$ est de dimension 3.*

Théorème 15 Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels, soient $(e_1, ..., e_p)$ une base de E_1 et $(e_{p+1}, ..., e_q)$ une base de E_2.

$$\begin{array}{rcl} E & = & E_1 + E_2 \Longleftrightarrow (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, .., e_q) \text{ génératrice de } E \\ \{0_E\} & = & E_1 \cap E_2 \Longleftrightarrow (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, .., e_q) \text{ libre de } E \\ E & = & E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, .., e_q) \text{ base de } E \end{array}$$

Proposition 16 Tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

3 Relations entre les dimensions

3.1 isomorphisme

Proposition 17 Deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement ils ont même dimension.

Corollaire 18 Tout $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

3.2 Espace vectoriel produit

Proposition 19 Soient deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels E et F de dimensions finies $E \times F$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

3.3 Somme de sous espaces vectoriels

Soit E un Kespace vectoriel de dimension n et E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E

Théorème 20

$$E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ \dim E = \dim E_1 + \dim E_2 \end{cases}$$

$$E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ \dim E = \dim E_1 + \dim E_2 \end{cases}$$

Proposition 21 $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$ où F_1, F_2 sont deux sous espaces vectoriels de E

4 Rang

Définition 6 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on appelle **rang** de la famille $(u_1, .., u_n)$ de vecteurs de E, la dimension de $Vect(u_1, .., u_n)$*

Remarque 5 *Soit $\mathcal{E} = (u_1, .., u_n)$ une famille de n vecteurs de E.*
$\mathcal{E}$ est génératrice de vect $(\mathcal{E})$ donc $rg(\mathcal{E}) \leq n$.
Si $\mathcal{E}$ contient r vecteurs linéairement indépendants on a $rg(\mathcal{E}) \geq r$ et on a égalité si et seulement si ces r vecteurs forment une partie génératrice de $\mathcal{E}$.

Définition 7 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le rang de f ,noté $rg\ f$ est la dimension de $Im\ f$ si elle est finie.*

Remarque 6 *1) $\dim F = n \Longrightarrow$ $rg\ f \leq n$. On a égalité si et seulement si f est surjective.*
2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de E. $Im\ f = Vect\,(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$, ce qui entraine $rg\ f \leq p$. On a égalité si et seulement si f est injective.

Théorème 22 1) Si f est un isomorphisme de E sur F et si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim E_1 = \dim f(E_1)$.
2) si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in GL(E)$ et $h \in GL(F)$ alors $rg(fog) = rg(f) = rg(hof)$

Théorème 23 du rang :Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, Imf est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker f$
Si F est de dimension finie

$$\dim E = rg\, f + \dim \ker f$$

Exemple 7 *1) Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E $\phi : \begin{cases} E_1 \times E_2 \longrightarrow & E_1 + E_2 \\ (x_1, x_2) \longmapsto & x_1 + x_2 \end{cases}$ $Im\ \phi = E_1 + E_2$, $\ker \phi = \{(x, -x) | x \in E_1 \cap E_2\}$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$ par l'isomorphisme $x \longmapsto (x - x)$.*
On a alors : $\dim(E_1 + E_2) = \dim Im\, \phi = \dim E_1 \times E_2 - \dim E_1 \cap E_2$ ce qui permet de retrouver la dimension d'une somme de sous espaces vectoriels.
2) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Δ est un endomorphisme de E. Si P est constant on a $\Delta(P) = 0$.
Réciproquement $\Delta(P) = 0 \Longrightarrow P(X + 1) = P(X)$ ce qui entraine que $Q(X) = P(X) - P(0)$ admet tous ls entiers comme racines, il est donc nul. P est constant. En notant $P_0 = 1$ on a $\ker \Delta = \mathbb{R}\, P_0$, c'est une droite vectorielle.
$Im\ \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim \ker \Delta = 1$ entraine que $Im\ \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par le théorème du rang.

4.1 Caractérisation des isosmorphismes

Théorème 24 $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de même dimension n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) f est injective.
2) f est surjective.
3) f est un isomorphisme.

Corollaire 25 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Sont équivalents :
1) u est injective.
2) u est surjective.
3) $u \in GL(E)$.

Corollaire 26 Sous les hypothèses du corollaire précédent, s'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$ alors $u \in GL(E)$ et $v = u^{-1}$

4.2 Formes linéaires en dimension finie

On considère un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.
Soit f in E^* une forme linéaire non nulle sur E, on pose $a_i = f(e_i), i \in [\![1, n]\!]$ et on définit $H = \ker f$ qui est un hyperplan comme démontré précedemment.

Proposition 27 1) $\dim H = n - 1$. Tout sous espace vectoriel de dimension $n - 1$ est un hyperplan de E.
2) $x \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ où $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.
$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est appelé équation de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 7 *Soient $f, g \in E^*$ deux formes linéaires non nulles. On a :*

$$\ker f = \ker g \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \ g = \lambda f.$$

$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$ *est une deuxième équation de H dans $\mathcal{B}$* $\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ b_i = \lambda a_i.$

5 Hyperplans affines. Droites et plans

5.1 Repère d'un espace affine

Définition 28 On appelle repère cartésien de E, tout couple $(\Omega, \mathcal{B})$ où Ω est un point de E et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ un repère cartésien où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$, on appelle coordonnées d'un point M de E dans $\mathcal{R}$ l'unique $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\overrightarrow{\Omega M} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$$

Définition 29 Soit H un hyperplan de l'espace vectoriel réel E et A un point de E considéré comme espace affine.
$\mathcal{H} = A + H$ est un sous espace affine de E appelé hyperplan affine de E.
Si $\dim E = 2$ c'est une droite affine et H une droite vectorielle. Si $\dim E = 3$ c'est un plan affine et H un plan vectoriel.

Proposition 30 Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E et $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ un repère de l'espace affine E.
On pose $a_i = f(\overrightarrow{e_i}), i \in [\![1, n]\!]$ et on définit $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ On a $M \in \mathcal{H} \iff (*) \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h = 0$
où $h = -\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$.
Cette relation $(*)$ est une équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Réciproquement $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h$ avec $(a_1, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$ est l'équation dans $\mathcal{R}$ d'un hyperplan affine de direction H dans $\mathcal{B}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

5.2 Parallélisme de deux hyperplans affines

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux hyperlans affines d'équations respectives dans le repère $\mathcal{R}$:
$\mathcal{H}_1 : \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h = 0.$
$\mathcal{H}_2 : \ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + h' = 0.$

Proposition 31

$$\mathcal{H}_1 \parallel \mathcal{H}_2 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ b_i = \lambda a_i$$

Si de plus $h' = \lambda h$ les hyperlans sont confondus.

5.3 Droites affines en dimension 2

Equations cartésiennes
Soit E un espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base de E et $\mathcal{R}$ =$(\Omega, \mathcal{B})$ un repère de l'espace affine E. Une droite affine $\mathcal{D}$, hyperlpan affine de l'espace E a une équation de la forme : $ax+by+c=0,\ (a,b) \neq (0,0)$, ce qui siginfie que $M(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow ax+by+c=0$. C'est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Si $b \neq 0,\ ax+by+c=0 \Longleftrightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} = mx+p$. Le réel m est appelé coefficent directeur de la droite et p ordonnée à l'origine.
La droite vectorielle D direction de $\mathcal{D}$ a pour équation $aX+bY=0$, ce qui signifie qu'un vecteur $\overrightarrow{W}(\alpha,\beta) \in D \Longleftrightarrow a\alpha+b\beta=0$
Parallèlisme, intersection
Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que
$a' = \lambda a,\ b' = \lambda b$ ce qui est équivalent à $ab' - a'b = 0$, dans le cas contraire les droites sont sécantes en un point $A(u,v)$ car la système :
$\begin{cases} ax+by & = c \\ a'x+b'y & = c' \end{cases}$ a alors une solution unique.

Exemple 8 $\mathcal{D}_1 : 3x-2y-4=0$.
$\mathcal{D}_2 : x-4y+2=0$.
$\begin{cases} 3x-2y-4 & = 0 \\ x-4y+2 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=2, y=1.$ *Ces deux droites sont sécantes en* $A(2,1)$.

Equations paramétriques
Il existe une autre façon de représenter des droites en dimension 2. Soit $\mathcal{D}$ droite passant par $A(a,b)$ et de direction $D = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta)$.

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \ x = a+t\alpha,\ y = b+t\beta.$$

Ce sont des équations paramètriques de $\mathcal{D}$.

5.4 Plans affines en dimension 3

Equations cartésiennes
Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E et $\mathcal{R}$ =$(\Omega, \mathcal{B})$ un repère de l'espace affine E. Un plan affine $\mathcal{P}$, hyperlpan affine de l'espace E a une équation de la forme : $ax+by+cz+d=0,\ (a,b,c) \neq (0,0,0)$, ce qui siginfie que $M(x,y,z) \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow ax+by+cz+d=0$. C'est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Une éqution du plan vectoriel P direction de $\mathcal{P}$ est : $aX+bY+cZ=0$
Parallèlisme, intersection
Soit $\mathcal{P} = A+P,\ \mathcal{P}' = A'+P'$ où P et P' sont deux plans vectoriels de E et A et A' deux points.
$\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0,\ \mathcal{P}' : a'x+b'y+c'z+d'=0$ équations de ces plans.
Ces deux plans sont parallèles si et seulement si $P = P'$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c$.
S'ils ne sont aps parallèles on a $P + P' = E$ et $\dim(P \cap P') = 4-3 = 1$ l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ est donc une droite vectorielle.
Une droite n'a pas une équation cartésienne dans ce repère, elle peut être définie par l'intersection de deux plans sécants ou par des équations paramétriques de la forme :
$M(x,y,z) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ x = a+t\alpha,\ y = b+t\beta,\ z = c+t\gamma.$ soit $\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0$ la droite précédente est parallèle au plan si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ ce qui exprime que le vecteur $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ qui définit la droite est dans le plan P.

Exemple 9 *On considère le plan* $\mathcal{P} : 2x+3y+z-4=0$ *et la droite* $\mathcal{D} : x = 3+2t,\ y = 5+3t,\ z = -3+t$. *C'est la droite passsant par* $A(3,5,-3)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}(2,3,1)$ *qui n'est pas dans la direction du plan.*
$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \Longleftrightarrow 2(3+2t)+3(5+3t)+3+t-4=0$ *et* $x = 3+2t,\ y = 5+3t,\ z = -3+t$
$\Longleftrightarrow t=-1,\ x=1,;y=2,\ z=-4.$