ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Dans ce chapitre les espaces vectoriels sont réels.

1 Produit scalaire

1.1 Définitions

Soient E un espace vectoriel et ϕ une forme bilinéaire sur E. Elle est :
a) Symétrique si : $\forall x, y \in E,\ \phi(y,x) = \phi(x,y)$.
b) Définie positive si on a les deux propriétés : $\forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0$ et $\phi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ autrement dit $\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow \phi(x,x) > 0$.

Exemple 1 *1) $E = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in E$ on définit $\phi(x,y) = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k$ est appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.*
2) $E = C([a,b], \mathbb{R})$, $f, g \in E$, $\phi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Définition 2 *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive.*
Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Notation
Dans la suite $\phi(x,y)$ sera noté $(x|y)$ et sera lu x scalaire y.

1.2 Norme euclidienne

Définition 3 *Une norme sur l'esapce vectoriel E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :*
a) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
b) $\forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (Homogénéité).
c) $\forall (x,y) \in E \times E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire).

Proposition 4 *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*
$\forall (x,y) \in E \times E,\ |(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)$.

On utilise : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda x + y | \lambda x + y) \geq 0$.

Remarque
Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Proposition 5 *L'application $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E appelée norme euclidienne. On note $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.*

On a $(x+y|x+y) = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y) \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\,||y||$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, d'où $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Exemple 6 *1) $E = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in E$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique se traduit par :*
$$|(x|y)| = |\sum_{k=0}^{n} x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} y_k^2}.$$
2) $E = C([a,b], \mathbb{R})$, $f, g \in E$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient
$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt}.$$

Définition 7 *Un vecteur x de E espace préhilbertien est unitaire ou normé si $||x|| = 1$.*

1.3 Identités de polarisation

Soient E un espace préhilbertien et x, y deux vecteurs de E.

Proposition 8
1. $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y)$.
2. $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2(x|y)$.
3. $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ *est appelé égalité du parallélogramme.*
4. $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4(x|y)$.

Remarque 9 *Une norme sur un espace euclidien peut ne pas être euclidienne (c'est à dire provenir d'un produit scalaire).*
$E = \mathbb{R}^2$ *on vérifie que* $N(x,y) = \max(|x|,|y|)$ *définit une norme sur* E.
Soient $u = (2,1), v = (1,2) \in E$, $N(u+v) = 3$, $N(u-v) = 1$, $N(u) = N(v) = 2$.
$(N(u+v))^2 + (N(u-v))^2 \neq 2((N(u))^2 + (N(v))^2$ *ce qui montre que l'égalité du parallélogramme n'est pas vérifiée,* N *n'est pas euclidienne.*

2 Orthogonalité

2.1 Orthogonal d'un sous ensemble non vide

Définition 10
1. *Deux vecteurs x, y de l'espace préhilbertien E sont orthogonaux si $(x|y) = 0$.*
2. *Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ l'orthogonal de A est l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A,\ (x|y) = 0\}$, c'est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A. $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.*

Exemple 11 *1) $E = \mathbb{R}^n$, les vecteurs de la base canonique sont deux orthogonaux et unitaires.*
2) E espace vectoriel des fonctions continues 2π périodiques sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :
$(f|g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. *Les fonctions* cos *et* sin *sont unitaires et $(sin|cos) = 0$, ces fonctions sont orthogonales.*
3) Soit E un espace préhilbertien $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$.
4) Soient E un espace préhilbertien et $a \in E$, $H = \{a\}^\perp$, $a \neq 0$ est un hyperplan ,c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $u : x \longmapsto (x|a)$.

Popriétés 12 *Soit E un espace préhilbertien et A, B deux parties non vides de E.*
1) On a : $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
2) $A \cap A^\perp = \{0_E\}$.

Proposition 13 *Soit E un espace préhilbertien et $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset E$. On a $A^\perp = (vect(A))^\perp$.*

Remarque 14 *1) $\{x\}^\perp = (\mathbb{R}\, x)^\perp$.*
2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de F sous espace vectoriel de E.
$x \in F^\perp \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ (x|e_i) = 0$.

2.2 Théorème de Pythagore

Proposition 15 *Les vecteurs x et y de l'espace préhilbertien E sont orthogonaux si et seulement si* $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Définition 16 *Soit E un espace préhilbertien. Une famille orthogonale de E est une famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.*
Une famille orthonormale ou orthonormée de E est une famille orthogonale de vecteurs de E dont les vecteurs sont normés.

Exemple 17 *E espace vectoriel des fonctions continues 2π périodiques sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :* $(f|g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. *La famille de vecteurs* $(f_0 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ f_k : x \mapsto \cos kx,\ g_k : x \mapsto \sin kx,\ k \in \mathbb{N}^*)$ *est une famille orthonormale.*

Proposition 18 *Toute famille othogonale de vecteurs non nuls est libre, en particulier une famille orthonormale est libre.*

Proposition 19 *si la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est orthogonale on a* $\left|\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2$.

Théorème 20 ***d'orthonormalisation de Schmidt :***
Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, il existe une base orthonormée $(f_1, ..., f_n)$ telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ Vect(f_1, ..., f_k) = Vect(e_1, ..., e_k)$$

2.3 Bases orthonormales

Proposition 21 *Tout espace euclidien possède une base orthonormale.*

Etant donnée une base $(e_1, ..., e_n)$ de E on construit une base orthonormale $(f_1, ..., f_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Proposition 22 *Toute famille orthonormale de l'espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormale de E.*

Si $(f_1, ..., f_k)$, $k \leq n = \dim E$ est une famille orthonormale de E, elle est libre, le théorème de la base incomplète permet de la compléter en une base
$(f_1, ..., f_k, e_{k+1}, e_n)$ en appliquant la méthode de Schmidt on obtient une base orthonormale $(f_1, ..., f_k, f_{k+1}, f_n)$ de E.

Proposition 23 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de l'espace euclidien E.*
1) Si $x \in E$ on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i$.
2) si $x, y \in E$, $(x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\,(y|e_i)$.
3) X et Y étant les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$, on a :
$(x|y) = {}^tX\,Y,\ \ ||x||^2 = {}^tX\,X$.

3 Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

3.1 Suppléméentaire orthogonal

Définition 24 *Deux sous espaces vectoriels F et G d'un espace préhilbertien E sont orthogonaux si :*

$$\forall (x, y) \in F \times G,\ \ (x|y) = 0$$

c'est à dire si $F \subset G^{\perp}$ ou ce qui est équivalent $G \subset F^{\perp}$.

Remarque 25 *Soit F un sous espace de E, les sous espaces F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux.*

Proposition 26 *Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de l'espace préhilbertien E , alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires, on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.*

Démonstration par analyse synthèse.
Soit $x \in E$, supposons l'existence de $y \in F$ et de $z \in F^\perp$ tels que $x = y + z$. F étant de dimension finie, il possède une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$. On a :
$\forall i \in [\![1, p]\!],\ (e_i|z) = 0 = (e_i|x - y) = (e_i|x) - (e_i|y)$.
La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale on a $y = \displaystyle\sum_{i=0}^{p}(y|e_i), e_i = \sum_{i=0}^{p}(x|e_i), e_i,\ z = x - y = x - \sum_{i=0}^{p}(x|e_i), e_i$. Ce qui montre l'unicité d'un tel couple (y, z) s'il existe.
Réciproquement on pose $y = \displaystyle\sum_{i=0}^{p}(x|e_i), e_i$ et $z = x - y,\ y \in F,\ x = y + z$ et
$\forall i \in [\![1, p]\!],\ (e_i|z) = (e_i|x - y) = (e_i|x) - (e_i|y) = 0$ donc $z \in F^\perp$. Les sous espaces F et $F^\perp$ sont donc suppléméntaires.

Corollaire 27 *Soit F un sous espace vectoriel de l'espace euclidien E, on a :*
1) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
2) $(F^\perp)^\perp = F$.

Proposition 28 *Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E. soit $p \in [\![0, n]\!]$.*
1) $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n)$ sont des bases orthonormales de deux supplémentaires orthogonaux.
2) Soit F un sous espace vectoriel de E. Si F et $F^\perp$ admettent respectivement $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n)$ comme bases orthonormales alors la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Proposition 29 *Soit u une forme linéaire sur l'espace euclidien E. Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E,\ u(x) = (a|x)$.*

Remarque 30 *Ce résultat peut être faux en dimension infinie.*

Unicité
$\forall x \in E,\ (a|x) = (b|x) \Longrightarrow \forall x \in E,\ (a - b|x) = 0$ en prenant $x = a - b$ on obtient $||a - b||^2 = 0$ donc $a = b$.
Existence
Si $u = 0$, $a = 0$, sinon $H = \ker u$ est un hyperplan de E et $D = H^\perp$ est une droite vectorielle. Soit $b \in D,\ b \neq 0$. La forme linéaire définie par $v(x) = (b|x),\ x \in E$ a même noyau que u, elles sont donc proportionnelles : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E u(x) = \lambda v(x)$ le vecteur $a = \lambda b$ convient.

3.2 Projections orthogonales, symétries orthogonales

Définition 31 *soit E un espace préhilbertien et F un sous espace vectoriel non nul de E de dimension finie. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. Elle est notée P_F.*

Proposition 32 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base orthonormale de F, si $x \in E$, on a*
$P_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)\, e_i$.

$P_F(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\, e_j,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ (x - P_F(x)|e_i) = 0 \Rightarrow (x|e_i) - \lambda_i = 0$ car $x - P_F(x) \perp F$.

Remarque 33 *Dans la méthode de Schmidt, $\lambda_i = (f_i|e_{p+1})$ ce qui entraine $g_{p+1} = e_{p+1} - P_{F_p}(e_{p+1})$ où $F_p = vect(e_1, e_2, \cdots, e_p)$.*

Définition 34 *Distance à un sous espace.*
Soient $x \in E$ et F un sous espace vectoriel de E, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base orthonormale de F la distance de x à F est définie par :
$d(x, F) = \inf\{||x - y||\ |y \in F\}$.

Remarque 35 *Soit $a \in E,\ D = \mathbb{R}a$. La projection orthhogonale sur D est définie par : $P_D(x) = \dfrac{(a|x)}{||a||^2}\,a$.*
Si E est de dimension finie et $H = D^\perp$ hyperplan de E la projection sur H est définie par
$P_H(x) = x - P_D(x) = x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}\,a$.

Proposition 36 *Soit p une projection vectorielle de l'espace euclidien E, les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) La projection p est une projection orthogonale.
2) $\forall x, y \in E$ on a l'égalité : $(p(x)|y) = (x|p(y))$.
3) La matrice de p dans toute base orthonormale est symétrique.
4) $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leq ||x||$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E.
$1 \Longrightarrow 2$ en effet $(x - p(x)|p(y)) = 0,\ (y - p(y)|p(x)) = 0 \Longrightarrow (x|p(y)) = (p(x)|y) = (p(x)|p(y))$.
$2 \Longrightarrow 3$ en effet $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{ij} = (p(e_i)|e_j) = a_{ji}$.
$3 \Longrightarrow 2$, $(p(x)|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x|e_i)(y|e_j)(p(e_i)|e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x|e_i)(y|e_j)(p(e_j)|e_i) = (x|p(y))$.
$2 \Longrightarrow 1$. Soit $y \in F,\ (x - p(x)|y) = (x|y) - (p(x)|y) = (x|y) - (x|p(y)) = (x|y) - (x|y) = 0$, ce qui montre 1.
$1 \Longrightarrow 4$, $(x - p(x)|p(x)) = 0 \Longrightarrow (x|p(x)) = ||p(x)||^2 \leq |x||\,||p(x)||$ si $p(x) = 0$ c'est immédiat, sinon $||p(x)|| \leq ||x||$.
$4 \Longrightarrow 1$. Soient $(x, y) \in F \times F^\perp,\ \lambda \in \mathbb{R},\ p(x + \lambda y) = x$ ce qui entraine :
$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||x||^2 \leq ||x + \lambda y||^2 \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2||y||^2 + 2\lambda(x|y) \geq 0$ soit $(x|y) = 0$ ce qui montre que p est la projection orthogonale sur F.

Théorème 37
1. *$d(x, F) = ||x - P_F(x)||$.*
2. *$\forall y \in F,\ y \neq P_F(x) \Longrightarrow ||x - y|| > d(x, F)$.*
3. *$d^2(x, F) = ||x||^2 - ||P_F(x)||^2$.*
4. *$d^2(x, F) = ||x||^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)^2$.*

Soit $y \in F,\ x - y = (x - P_F(x)) + (P_F(x) - y)$ or $x - P_F(x) \perp F,\ P_F(x) - y \in F$ d'où d'après le théorème de Pythagore :
$||x - y||^2 = ||x - P_F(x)||^2 + ||P_F(x) - y||^2$ ce qui montre 1 et 2.
$x = x - P_F(x) + P_F(x)$ or $x - P_F(x) \perp P_F(x)$ d'où $||x||^2 = ||x - P_F(x)||^2 + ||P_F(x)||^2$.

3.3 Symétries orthogonales

Définition 38 *1) Soit E un espace euclidien et F un sous espace vectoriel non nul de E.La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. Elle est notée S_F.*
2) Si $F = H$ hyperplan de E, S_H est appelée réflexion d'hyperplan H.

Proposition 39 *Soient x, y deux vecteurs distincts de l'espacce euclidien E avec $||x|| = ||y||$. Il existe une réflexion unique σ telle que $\sigma(x) = y$.*

$\sigma = S_H$ avec $H = \{x - y\}^\perp$.

4 Groupe orthogonal d'un espace euclidien

4.1 Définition

Soit E un espace euclidien.

Définition 40 *Un endmorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie (ou est orthogonal) si il conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.*

Proposition 41 *1) $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si il conserve la norme :*
$\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x||$.
2) Une isométrie de E est un automorphisme de E.

$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{4}\left(||u(x)+u(y)||^2 - ||u(x)-u(y)||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) = (x|y)$.
$u(x) = 0 \Longrightarrow ||u(x)|| = ||x|| = 0$ d'où $\ker u = \{0\}$.

Exemple 42 *1) Id_E et $-Id_E$ sont des isométries de E.*
2) Une symétrie est une isométrie de E si et seulement si elle est orthogonale.

Soit s une symétrie othogonale par rapport à F sous espace vectoriel de E. $x \in E,\ x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F,\ x_2 \in F^{\perp}$.
$s(x) = x_1 - x_2,\ ||s(x)||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2 = ||x||^2$.
Réciproquement supposons s isométrie, en supposant que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G on a avec $(x_1, x_2) \in F \times G$, $||x_1+x_2||^2 - ||x_1-x_2||^2 = ||x||^2 - ||s(x)||^2 = 0 = 4(x_1|x_2)$ ce qui montre que $G = F^{\perp}$.

Théorème 43 *L'ensemble des isométries de E est un sous groupe de $GL(E)$appelé groupe orthogonal et noté $O(E)$.*

Proposition 44 *$u \in O(E)$ si et seulement si l'image par u d'une base orthonormale est orthonormale.*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E.
$u \in O(E) \Longrightarrow (u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{ij}$.
Réciproquement soit $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n))$ base orthonormale de E, $x = \sum_{j=1}^{n}(x|e_j)e_j$ ce qui entraine :

$$||u(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n}(u(x)|u(e_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(x|e_j)u(e_j)|u(e_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 = ||x||^2.$$

Proposition 45 *Si F est un sous espace vectoriel stable par $u \in O(E),\ u(F) \subset F$, il en est de même de $F^{\perp}$.*

4.2 Matrices orthogonales

Définition 46 *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tM\,M = I_n$*

Proposition 47 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) M est une matrice orthogonale.
2) M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.
3) ${}^tM$ est une matrice orthogonale.
4) $M\,{}^tM = I_n$.

Proposition 48 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) M est une matrice orthogonale.
2) Les colonnes de M forment une base ortthonormale de $\mathbb{R}^n$.
3) Les lignes de M forment une base ortthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Soit $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n}$, ${}^tM\,M = A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} = I_n$. Ce qui entraine :
$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m'_{ik}m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}m_{kj} = (C_i|C_j) = \begin{cases} 1 \text{ si} & i = j \\ 0 \text{ si} & i \neq j \end{cases}$.
Ce qui montre que $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
On obtient un résultat analogue pour les lignes à l'aide de $M\,{}^tM$.

Exemple 49 *1) Inverse de* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

2) Inverse de $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Proposition 50 *L'ensemble des matrices orthogonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est un sous groupe de* $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ *appelé groupe orthogonal d'ordre* n *et noté* $O_n(\mathbb{R})$ *ou* $O(n)$.

Proposition 51

1. *Si* $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det M =^+_- 1$. $M \in O_n(\mathbb{R})$ *est dite positive si* $\det M = 1$, *négative si* $\det M = -1$.
2. *L'ensemble des matrices positives de* $O_n(\mathbb{R})$ *forme un sous groupe de* $O_n(\mathbb{R})$ *appelé groupe spécial orthogonal d'ordre* n *et est noté* $SO_n(\mathbb{R})$ *ou* $SO(n)$.

Proposition 52 *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ *une base orthonormale de l'espace euclidien* E *et* $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ *une deuxième base de* E. *La base* $\mathcal{B}'$ *est orthonormale si et seulement si la matrice de passage* $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ *est orthogonale.*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (e'_i|e'_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k | \sum_{k=1}^{n} p_{kj} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}\, p_{kj} = ({}^tP\, P).$$

La base $\mathcal{B}'$ est orthonormale si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (e'_i|e'_j) = \delta_{ij}$ c'est à dire si et seulement si la matrice P est orthogonale.

Définition 53 *Orienter un espace vectoriel* E *de dimension finie revient à fixer une base* $\mathcal{B}$ *de référence. Une autre base* $\mathcal{B}'$ *est dite directe si* $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$ *et indirecte si* $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) < 0$.

Corollaire 54 *Soit* $\mathcal{B}$ *une base orthonormale directe de l'espace euclidien* E. *Une base orthonormale* $\mathcal{B}'$ *est directe si et seulement si* $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in SO_n(\mathbb{R})$.

En effet la base orthonormale $\mathcal{B}'$ est directe si et seulement si P est orthogonale et si $\det P = 1$.

Corollaire 55 *Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux base orthonormale directes de l'espace euclidien* E *de dimension* n.
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n,\ det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = det_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

$det_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})\, det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Théorème 56 *L'automorphisme* $u \in GL(E)$ *est une isométrie si et seulement si sa matrice est orthogonale dans toute base orthonormale de* E.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de l'espace euclidien E, u est une isométrie si et seulement si $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E.
Or $M_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est orthogonale si et seulement si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale si et seulement si $u \in O(E)$.

Proposition 57 *L'ensemble des isométries de déterminant 1 est un sous groupe de* $O(E)$ *appelé groupe spécial orthogonal de* E *et est noté* $SO(E)$. *Ses éléments sonts ppelées isométries directes ou rotations de* E. *Une isométrie de déterminant -1 est dite indirecte.*

Proposition 58 *Matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormale*
Soient $u \in GL(E)$ *et* $\mathcal{B}$ *une base orthonormale de* E, $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.
u *est une symétrie orthogonale de* E *si et seulement si* $A \in O_n(\mathbb{R})$ *et* ${}^tA = A$ *(A symétrique).*

Si u est une symétrie orthogonale on a $u \in O(E)$ d'où $A^{-1} = {}^tA = A$ car u est une involution.
Réciproquement ${}^tA = A$ et ${}^tA = A$ entraine que u est une symétrie orthogonale car dans ce cas $u \in O(E)$.

Proposition 59 *Les réflexions sont des isométries indirectes*

Soit S_H la réflexion d'hyperplan H. On choisit une base orthonormale de H, $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$ et $e_n \in H^\perp$ normé.
La base $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Dans cette base la matrice de S_H est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est -1.

Produit mixte et produit vectoriel

Définition 60 *On appelle produit mixte de n vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de l'espace euclidien E de dimension n, leur déterminant dans une base orthonormale directe quelconque de E. Il est noté*
$[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ *ou* $Det(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Proposition 61 *soit u un endomorphisme de E. On a :* $[u(x_1), u(x_2), \cdots, u(x_n)] = \det(u)\,[x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

Proposition 62 *Produit vectoriel. Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E. Soient $u, v \in E$, il existe un vecteur unique, noté $u \wedge v$ tel que :*
$\forall x \in E,\ [u, v, x] = (u \wedge v | x)$.

L'application $\phi : x \longmapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire. Il existe $a \in E$ unique (proposition 29) tel que $\forall x \in E,\ \phi(x) = (a|x)$, le vecteur a représente $u \wedge v$.

Remarque 63 *1)* $Det(u, v, x) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$ *qui donne les coordonnées de $u \wedge v$ dans cette base orthonormale .*
2) Le vecteur $u \wedge v$ est ortgonal à u et à v, si ces deux vecturs sont non colinéaires il est donc orthogonal au plan vectoriel $P = Vect(u, v)$.

5 Isométries vectorielles en dimension 2

Soit E un espace euclidien de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base orthonormale directe de E.

5.1 Matrices orthogonales

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & (1) \\ c^2 + d^2 = 1 & (2) \\ ac + bd = 0 & (3) \end{cases},\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$(1) \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ a = \cos\theta,\ b = \sin\theta$.
$(2) \iff \exists \theta' \in \mathbb{R},\ c = \cos\theta',\ d = \sin\theta'$.
$(3) \Longrightarrow \cos(\theta - \theta') = 0 \Longrightarrow \theta' \equiv \dfrac{\pi}{2} + \theta \ \ mod\ \ 2\pi$ ou $\theta' \equiv -\dfrac{\pi}{2} + \theta \ \ mod\ \ 2\pi$.
Réciproquement on vérifie que les matrices :$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ sont orthogonales.
On a $\det(M_1) = 1$ et $\det(M_2) = -1$. D'où :

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a de même l'ensemble des matrices orthogonales indirectes :
$O_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Proposition 64 *Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $R(\theta)$ et $S(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $R(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.*

Proposition 65 *. $\forall \theta,\ \theta' \in \mathbb{R},\ R(\theta+\theta') = R(\theta)\,R(\theta')$.*
. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
. L'application $\psi : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (SO_2(\mathbb{R}),\times),\ \theta \longmapsto R(\theta)$ est un morphisme de groupes, dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

5.2 Rotations

Proposition 66 *Soit $r \in SO(E)$. Il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que la matrice de r soit égale à $R(\theta)$ dans toute base orthonormale directe de E, le réel θ est appelé angle de la rotation qui sera notée r_θ*

Remarque 67 *$r_{\theta+\theta'} = r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta'} \circ r_\theta$, $SO(E)$ est commutatif.*

Proposition 68 *soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs normés. Il existe une rotation r_θ unique telle que : $r_\theta(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$. On définit par $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \theta$ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$.*

On complète $\overrightarrow{u}$ en une base orthonormale directe $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'})$, les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans cette base sont $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u'},\ a^2+b^2 = 1$, ce qui entraine l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta,\ b = \sin\theta$, la rotation r_θ de matrice $R(\theta)$ convient.

Remarque 69 *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs non nuls quelconques de E on définit $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \left(\widehat{\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||},\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}}\right)$.*

Proposition 70 *Relation de Chasles.*
On a $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}})$ mod 2π.

On peut supposer les vecteurs normés.
$\exists \theta,\ \theta',\ r_\theta(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $r_{\theta'}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$.

Proposition 71 *Soit $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \theta$ on a $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\cos\theta$ et $Det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\sin\theta$.*

En supposant les vecteurs normés dans la base précédente $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'})$ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont $(1,0)$ et celles de $\overrightarrow{v}$ $(\cos\theta,\sin\theta)$.

Proposition 72 *Soit $r \in SO(E)$, on a $(\widehat{\overrightarrow{r(u)},\overrightarrow{r(v)}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ mod 2π. Une rotation conserve les angles orientés.*

$(r(\overrightarrow{u})|r(\overrightarrow{v})) = (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$ et $Det\,(r(\overrightarrow{u}),r(\overrightarrow{v})) = \det(r)Det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

5.3 Réflexions vectorielles

Proposition 73 *Les isométries vectorielles indirectes de E sont les réflexions.*

Soit s une isométrie vectorielle indirecte de E. Sa matrice dans la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est de la forme $S(\theta)$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$ dépendant de la base orthonormale directe choisie.
On a $S(\theta)^2 = I_2$ ce qui montre que s est une symétrie orthogonale.
Déterminons les vecteurs invariants par s.
$s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

Ce qui est éqivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lcl}(\cos\theta-1)x+\sin\theta y & = & 0\\ \sin\theta x-(\cos\theta+1)y & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}x+\cos\dfrac{\theta}{2}y\right) & = & 0\\ \cos\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}x-\cos\dfrac{\theta}{2}y\right) & = & 0\end{array}\right. .$$

L'ensemble des vecteurs invariants est la droite vectorielle d'équation :
$\sin\dfrac{\theta}{2}x-\cos\dfrac{\theta}{2}y=0$, $D=\mathbb{R}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\overrightarrow{e_1}+\sin\dfrac{\theta}{2}\overrightarrow{e_2}\right)$.

L'isométrie vectorielle s est donc la réflexion de droite D.

Proposition 74 *1) Soient $D=\mathbb{R}\overrightarrow{u}$, $D'=\mathbb{R}\overrightarrow{v}$ deux droites vectorielles où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont normés. La composée des réflexions $S_{D'}\circ S_D$ est la rotation d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$.*
2) toute rotation vectorielle est la composée de deux réflexions dont l'une peut être choisie arbitrairement.

On complète $\overrightarrow{u}$ en une base orthonormale directe $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'})$, dans cette base $M(S_D)=S_0$ et en posant $\theta\equiv(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) \mod 2\pi$, $M(S_{D'})=S(2\theta)$ d'aprés la proposition qui précède. La matrice de $S_{D'}\circ S_D$ est $S(2\theta)\,S(0)=R(2\theta)$. D'où $S_{D'}\circ S_D=r_{2\theta}$.

6 Groupe orthogonal en dimension 3

6.1 Décomposition en produit de réflexions

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ une base orthonormale directe de E.

Proposition 75 *Tout élément $u\in O(E)$ est produit (composé) de une deux ou trois réflexions.*

Démonstration
Soit $F=\ker(u_I d_E)$.
. $F=E$, $u=Id_E=S_P\circ S_P$ pour un plan P quelconque.
. $\dim F=2$, u est une réflexion de plan F car $v=u|_{F^\perp}=-Id_E$ étant donné que $v\in O(F^\perp)$.
. $\dim F=1$soit $x\in E$ tel que $u(x)=y\neq x$. $||x||=||y||$ donc il existe une réflexion de plan H telle que $s(x)=y$, $H=(\mathbb{R}(x-y))^\perp$. On pose
$v=s\circ u$. Montrons que $F\subset Inv(v)$.
Soit $z\in F$, $u(z)=z\Rightarrow u(x-z)=y-z$, On a donc $||x-z||=||y-z||\Rightarrow(x|z)=(y|z)\Rightarrow z\in H$.
On a donc $v(z)=s(z)=z$, $z\in Inv(s)$ de plus $v(x)=x$ et $x\notin F$ d'où : $F\subsetneq Inv(s)$ On a $\dim(Inv(s))=2$ ou 3, si c'était 3 on aurait $v=s\circ u=Id_E$ et u serait une réflexion. v est donc une réflexion et $u=v\circ s$ est composée de deux réflexions.
. $\dim F=0$. En procédant de la même manière on montre que u est composée de trois réflexions.

6.2 Rotations

Définition 76 *L'automorphisme $u\in O(E)$ est une rotation si l'ensemble de ses vecteurs invariants est une droite vectorielle. Elle est alors composée de deux réflexions. L'ensemble des rotations est $SO(E)$.*

Proposition 77 *Soit $u\in SO(E)$ et $D=\mathbb{R}\overrightarrow{f_3}=Inv(u)$, $\overrightarrow{f3}$ unitaire. On considère une base orthonormale de $P=D^\perp$, $(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2})$ telle que $\mathcal{B}'=(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3})$ soit une base orthonormale directe de E. Il existe $\theta\in\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$ tel que :*

$$M_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On dit que u est la rotation d'angle θ et d'axe D. Si $\theta=\pi$, u est la symétrie orthogonale par rapport à D, on dit que u est un retournement ou un demi tour.

En notant $v = u|_P$, $v \in O(P)$ admet $\{0_E\}$ comme seul vecteur invariant, c'est donc une rotation du plan et sa matrice dans la bse $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ de P est de la forme $R(\theta)$.

Proposition 78 *1) Soit u une rotation d'angle θ et d'axe $D = \mathbb{R}\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{f}$ unitaire et $\overrightarrow{a}$ un vecteur unitaire de $P = D^{\perp}$. On a*
$u(\overrightarrow{a}) = \cos(\theta)\overrightarrow{a} + \sin(\theta)(\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{a})$.
2) $\cos\theta = (\overrightarrow{a}|u(\overrightarrow{a}))$, $\sin\theta = \det(\overrightarrow{a}, u(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{f})$.

On choisit $\overrightarrow{b} \in P$ unitaire tel que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{f})$ soit une base orthonormale directe de E. En gardant les notations précédentes on a $M_{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}(v) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ d'où $u(\overrightarrow{a}) = \cos(\theta)\overrightarrow{a} + \sin(\theta)\overrightarrow{b}$ or $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{a}$.

Exercice

$M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que M est la matrice d'une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

Proposition 79 *Soit u une rotation d'angle θ et d'axe $D = \mathbb{R}\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{x} \in E$, on a :*
$u(\overrightarrow{x}) = \cos(\theta)\,\overrightarrow{x} + (1 - \cos(\theta))(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{f})\,\overrightarrow{f} + \sin(\theta)\,(\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{x})$.

7 Hyperplans affines d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.

7.1 Définitions

Définition 80 *1) Un repère orthonormal de E est un couple $(\Omega, \mathcal{B})$ où Ω est un point de l'espace affine E et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.*
2) Deux sous espaces affines $\mathcal{F}$et $\mathcal{G}$de E sont orthogonaux si leurs directions, les sous espaces vectoriels F est G sont orthogonaux.

Définition 81 *Soit H un hyperplan vectoriel de E et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de direction H. $D = H^{\perp}$. Un vecteur normal à $\mathcal{H}$ est un vecteur non nul de D, donc orthogonal à H.*

Proposition 82 *Soient $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ un repère orthonormal de E, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E et $\overrightarrow{a}$ un vecteur non nul de E de composantes $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dans $\mathcal{B}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
1) L'hyperplan vectoriel H est le noyau de la forme linéaire $f_{\overrightarrow{a}} : \overrightarrow{x} \longmapsto (\overrightarrow{a}|\overrightarrow{x})$.
2) L'hyperplan affine $\mathcal{H}$ admet une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ de la forme :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h$.
3) le vecteur $\overrightarrow{a}$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$.

$\mathcal{H} = A + H$, $M \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{a}) = 0$ montre $1 \Longleftrightarrow 2$.

Définition 83 *Deux hyperplans affines sont perpendiculaires s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.*

Remarque 84 *Si Deux hyperplans affines sont perpendiculaires, leur directions ne sont pas orthogonales si $n \geq 3$ pour des raisons de dimension.*

Proposition 85 *Deux hyperplans déquations respectives $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a'_i x_i = h'$ dans $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ un repère orthonormal de E sont perpendiculaires si et seulement si*
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\, a'_i = 0$.

Proposition 86 *soit* $f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ M \longmapsto (\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{n})$ *où* A *est un point de l'espace affine* E *et* $\overrightarrow{n}$ *un vecteur non nul de* E.
on appelle ligne de niveau de f *les ensembles* $\mathcal{H}_\lambda = \{M \in E,\ f(M) = \lambda\}$.
Les lignes de niveaux sont les hyperplans affines de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

$\exists B \in E, f(B) = \lambda$ car $u : \overrightarrow{x} \longmapsto (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{n})$ est surjective.
$f(M) = \lambda \iff (\overrightarrow{BM}|\overrightarrow{n}) = 0 \iff M \in B + H$ où H est l'hyperplan vectoriel noyau de la forme linéaire u.

7.2 Distance à un hyperplan affine

Proposition 87 *Soient* $\mathcal{H}$ *un hyperplan affine de* E *et* $M \in E$. *Il existe* $A \in \mathcal{H}$ *unique tel que :*
$d(M, \mathcal{H}) = \inf\{||\overrightarrow{MU}||\ |U \in \mathcal{H}\} = ||\overrightarrow{MA}||$

La droite $\mathcal{D} = M + \mathbb{R}\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal de $\mathcal{H}$ est perpendiculaire à $\mathcal{H}$, l'intersection est un point A qui convient car $||\overrightarrow{MU}||^2 = ||\overrightarrow{MA}||^2 + ||\overrightarrow{AU}||^2 \geq ||\overrightarrow{MA}||^2$ où $U \in \mathcal{H}$.

Proposition 88 *Soient* $\mathcal{H}$ *un hyperplan affine de* E, $M \in E$. *et* $U \in \mathcal{H}$.
$d(M, \mathcal{H}) = \dfrac{|(\overrightarrow{n}|\overrightarrow{MU})|}{||\overrightarrow{n}||}$.
Si une équation cartésienne de $\mathcal{H}$ *dans un repère orthonormal est :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i + h = 0$ *on a :*
$d(M, \mathcal{H}) = \dfrac{|\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i + h|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$ *où les coordonnées de* M *sont* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

7.3 Exemples en dimension 2 ou 3

En dimension 2.

$\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ repère orthonormal de E.
Equation de la droite passant par $A(4, 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, 1)$.
$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff (\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{n}) = 0 \iff 2(x - 4) + y - 1 = 0 \iff 2x + y - 9 = 0$.
La direction de $\mathcal{D}$ est la droite vectorielle d'équation : $2x + y = 0$. soit $N(1, 1)$, $d(N, \mathcal{D}) = \dfrac{|(\overrightarrow{n}|\overrightarrow{NA})|}{||\overrightarrow{n}||} = \dfrac{|2.1 + 1 - 9|}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$.
La droite $\mathcal{D}' : x - 2y + 8 = 0$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

En dimension 3.

$\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ repère orthonormal de E.
Equation du plan passant par $A(4, -5, -7)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, 5, -3)$.
$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff (\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{n}) = 0 \iff 2(x - 4) + 5(y + 5) - 3(z + 7) = 0 \iff 2x + 5y - 3z - 4 = 0$.

7.4 Orientation d'un hyperplan affine

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine et $D = \mathbb{R}\overrightarrow{n} = \mathcal{H}^\perp$ où $\overrightarrow{n}$ est normé.

Définition 89 *Une base orthonormale* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_{n-1}})$ *de* $\mathcal{H}$ *est directe si la base orthonormale* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_{n-1}}, \overrightarrow{n})$ *de* E *est directe.*