FRACTIONS RATIONNELLES

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

Théorème-définition 1 On définit sur $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_2, B_2) \ \ si \ \ A_1B_2 = A_2B_1$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
L'ensemble des classes d'équivalence ou ensemble quotient est appelé l'ensemble des fractions rationnelles et est noté $\mathbb{K}(X)$.
La classe de (A, B) sera notée $\frac{A}{B}$.

Théorème-définition 2 On définit sur $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ deux lois internes

$$\begin{aligned}(A_1, B_1)+(A_2, B_2) &= (A_1B_2 + A_2B_1, B_1B_2)\\ (A_1, B_1)\times(A_2, B_2) &= (A_1A_2, B_1B_2)\end{aligned}$$

Ces lois sont compatibles avec la relation $\mathcal{R}$ ce qui permet de définir sur $\mathbb{K}(X)$ deux lois $+$ et $\times$.

Théorème 3 $(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un corps commutatif.

Remarque 4 1) soient $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \times \mathbb{K}[X]^*$, on a $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$
2) soient $(A, B) \in (\mathbb{K}[X]\backslash\{0\})^2$ on a $\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \frac{B}{A}$

Définition 5 Pour toute fraction rationnelle F, il existe un représentant (A, B) tel que A et B soient premiers entre eux, il est appelé représentant irréductible de F.
Si (A_1, B_1) est un deuxième représentant irréductible de F on a $A_1 = \lambda A$ et $B_1 = \lambda B,\ \lambda \in \mathbb{K}^*$. Il n'existe donc qu'un seul représentant irréductible tel que le dénominateur soit unitaire.

Théorème-définition 6 Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, le nombre $\deg(A) - \deg(B)$ est indépendant du représentant (A, B) de F, il est appelé degré de F.

Proposition 7 Soient $(F, G) \in \mathbb{K}(X)^2$, on a :

$$\begin{aligned}\deg(F + G) &\leq \max(\deg(F), \deg(G))\\ \deg(F \times G) &= \deg(F) + \deg(G)\end{aligned}$$

Définition 8 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ tel que $F = \frac{A}{B}$, avec A et B premiers entre eux et soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **racine d'ordre** k de F toute racine d'ordre k de A et **pôle** d'ordre k de F toute racine d'ordre k de B.

Exemple 9

$$F = \frac{X^3 - 1}{X^2 - 1} = \frac{X^2 + X + 1}{X - 1}$$

F n'a pas de racines dans $\mathbb{R}(X)$ et admet 1 comme pôle simple.
F a deux racines simples dans $\mathbb{C}(X)$, j et j^2 et admet 1 comme pôle simple.

Définition 10 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, on appelle fonction rationnelle associée à F,
la fonction $\widetilde{F}$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie sur $\mathbb{K}\backslash\{pôles\}$ par $\widetilde{F}(x) = \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)}$.

2 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

2.1 Cas général

Proposition 11 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ tel que $F = \frac{A}{B}$, avec A et B premiers entre eux.
Il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $F = E + \frac{R}{B}$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.
E est appelé partie entière de F et $\frac{R}{B}$ partie fractionnaire de F.

Définition 12 Une fraction rationnelle F est paire (respectivement impaire) si $F(-X) = F(X)$ (respectivement $F(-X) = F(X)$).

Proposition 13 Dans la proposition précédente, si F est paire (respectivement impaire) E est paire (respectivement impaire).

Exemple 14 $F = \dfrac{X^5 + X^3 + X}{X^4 + 2X^2 + 1}$ a pour partie entière X car F est impaire.

Proposition 15 Soient $A \in \mathbb{K}[X], n \in \mathbb{N}^*, (S_1, ..., S_n) \in (\mathbb{K}[X]\backslash\{0\})^n$ tels que $A, S_1, ..., S_n$ soient premiers entre eux deux à deux,
il existe un unique $(E, R_1, ..., R_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ tels que :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{A}{S_1 ... S_n} & = & E + \dfrac{R_1}{S_1} + ... + \dfrac{R_n}{S_n} \\ \forall i & \in & \{1..., n\},\ \deg(R_i) < \deg(S_i) \end{array}$$

2.2 Décomposition dans $\mathbb{K}(X)$

Lemme 16 Soient $A, Q \in \mathbb{K}[X]$, le polynôme Q étant irréductible et $deg(A) < deg(Q^n),\ n \in \mathbb{N}^*$.
Il existe $(P_1, P_2, \cdots P_n) \in (K[X])^n$ avec $deg(P_i) < deg(Q), i \in [\![1, n]\!]$ tels que :
$\dfrac{A}{Q^n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q^i}$.

Théorème 17 Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, écrite sous forme irréductible où B est unitaire.
On note $B = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} Q_i^{r_i}$ la décomposition de B sous forme de produits de polyômes irréductibles unitaires deux à deux distincts.
Il existe un unique polynôme E et une unique famille de polynomes $(P_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r_i}$ tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{P_{ij}}{Q_i^j} \right) \text{ et } deg\left(\frac{P_{ij}}{Q_i} \right) < 0.$$

2.3 Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Lemme 18 Soit $A \in \mathbb{C}[X],\ b \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}^*,\ \deg(A) < k$, il existe un unique $(a_1, ..a_k) \in \mathbb{C}^k$ tel que

$$\frac{A}{(X-b)^k} = \frac{a_k}{(X-b)^k} + \frac{a_{k-1}}{(X-b)^{k-1}} + ... + \frac{a_1}{(X-b)}$$

Théorème 19 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ tel que $F = \frac{A}{B}$, avec A et B premiers entre eux et $B = \prod_{i=1}^{r} (X - b_i)^{k_i}$,
il existe un unique polynôme E et une unique famille de complexes $(a_{i,j})$ telle que

$$\begin{array}{rcl} F & = & E + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(X-b_i)^j} \\ & & \displaystyle\sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(X-b_i)^j} \text{ est appelé partie polaire associée à } b_i \end{array}$$

Exemple 20 Si $P = a \prod_{i=1}^{r} (X - b_i)^{k_i}$ alors $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{k_i}{(X-b_i)}$.

Proposition 21 Recherche pratique des parties polaires :
1) pôle simple :

$$\text{si } F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-b)C} \text{ et } b \text{ est un pôle simple alors } F = \frac{a}{X-b} + \frac{S}{C} \text{ avec } a = \frac{A(b)}{C(b)} = \frac{A(b)}{B'(b)}$$

2) si $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ alors

$$b \text{ pôle d'ordre } k \quad \Rightarrow \quad \overline{b} \text{ pôle d'ordre } k$$
$$\sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(X-b_i)^j} \text{ partie polaire associée à } b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\overline{a_{i,j}}}{(X-\overline{b_i})^j} \text{ partie polaire associée à } \overline{b_i}.$$

3) si $\widetilde{F}$ est paire ou impaire

$$b \text{ pôle d'ordre } k \Rightarrow -b \text{ pôle d'ordre } k$$

on peut trouver des relations entre les coefficients en utilisant l'unicité de la décomposition.

2.4 Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 22 Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$, écrite sous forme irréductible .
Soit $B = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X-a_i)^{r_i} \prod_{k=1}^{m} (X^2 + p_k X + q_k)^{t_k}$ la décomposition de B sous forme de produits de polyômes irréductibles unitaires deux à deux distincts de $\mathbb{R}[X]$.
Il existe un unique polynôme E et une unique famille de réels $(\lambda_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq r_i}$ et de réels $(a_{kl},\ b_{kl})_{1\leq k\leq m,\ 1\leq j\leq t_k}$ tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j} \right) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{t_k} \frac{a_{kl}X + b_{kl}}{(X^2 + p_k X + q_k)^l} \right).$$