INTEGRATION

Dans les trois premiers chapitres, a et b désignent deux réels tels que $a < b$ et toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Fonctions continues par morceaux

1.1 Définitions

Définition 1 — *On appelle subdivision de $[a,b]$ toute famille $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$ On appelle pas de la substitution $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n}$ le réel $\delta(u) = \max\{|u_i - u_{i-1}|, 1 \leq i \leq n\}$.*

- *On note $S_\sigma = \{u_0, u_1, \cdots, u_n\}$ l'ensemble des points de la subdivision, appelé support de cette subdivision. On note $\mathcal{S}_{[a,b]}$ ou simplement $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$.*
- *On dit que la subdivision σ' est plus fine que la subdivision σ si $S_\sigma \subset S_{\sigma'}$.*
- *La subdivision σ est réguliére si $u_j = a + j\dfrac{b-a}{n}$, $j \in [\![0, n]\!]$.*
- *Soient σ et σ' deux subdivisions quelconques, on note $\sigma \vee \sigma'$ la subdivision de support $S_\sigma \cup S_{\sigma'}$.*

1.2 Fonctions continues par morceaux

Définition 2 *Une fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a,b]$ telle que les restrictions de f à chacun des intervalles $]u_{i-1}, u_i[$, $1 \leq i \leq n$ soient continues et admettent des limites finies en u_{i-1} et u_i. Une telle subdivision est dite adaptée à f .*

Théorème 1 *L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est un anneau et est noté $\mathcal{CM}([a,b])$.*

Définition 3 *Une fonction ϕ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est en escalier si l'on peut trouver une subdivision $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que ϕ soit constante sur chaque intervalle $]u_{i-1}, u_i[$, $1 \leq i \leq n$. On dit que u est une subdivision adaptée à ϕ.*
On note $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$.

Proposition 2 $\mathcal{E}([a,b])$ est une sous anneau de $\mathcal{CM}([a,b])$.

Théorème 3 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$ et soit un réel $\varepsilon > 0$:*
il existe des fonctions en escaliers φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 4 Soit ϕ une fonction de $\mathcal{E}([a,b])$ et $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à ϕ, on note c_i la valeur de ϕ sur $]x_{i-1}, x_i[$, alors le réel

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(u_i - u_{i-1})$$

ne dépend pas de la subdivision u choisie. On l'appelle **intégrale** de ϕ sur $[a,b]$ et on le note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_{[a,b]} f(x)dx$.

Remarque 1 *L'intégrale de ϕ ne dépend pas des valeurs prises par ϕ aux points de la subdivision adaptée qui a servi à la calculer.*

2.2 Propriétes

1. Lintégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a,b])$.
2. Une fonction en escalier positive a une intégrale positive et par conséquent si $(f,g) \in \mathcal{E}([a,b])^2$
   $f \leq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$
3. Soit $c \in [a,b]$, f est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si f est en escalier sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$

   et on a $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$, on a*

$$E_-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \qquad \varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\} \text{ admet une borne supérieure}$$

$$E_+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \qquad \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } f \leq \psi \right\} \text{ admet une borne inférieure}$$

et ces deux bornes sont égales. Ce nombre est appelé intégrale de f sur $[a,b]$ et not $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_{[a,b]} f(x)dx$.

Remarque 2 *Soit f une fonction en escalier su $[a,b]$, l'intégrale de f est le plus grand élément de $E_-(f)$ et le plus petit élément de $E_+(f)$.*

2.4 Propriétes

1. L'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{CM}([a,b])$.
2. Une fonction positive a une intégrale positive et par conséquent si $(f,g) \in \mathcal{CM}([a,b])^2$
3. $f \leq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$
4. $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$
5. Inégalité de la moyenne : $\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$
6. $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$
7. Soit $c \in [a,b]$, f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si f est continue par morceaux sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et on a $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

Proposition 5 Inégalité de **Cauchy Schwarz :** soient $(f,g) \in \mathcal{CM}([a,b])^2$

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$

2.5 Cas des fonctions continues

Proposition 6 Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$,

$$f = 0 \Leftrightarrow \int_{[a,b]} f = 0$$

Proposition 7 Egalité dans inégalité de **Cauchy Schwarz :** soient $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b])^2$

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ g = \lambda f$$

Définition 5 *Soient $u = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ et $v = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de points de $[a,b]$ telle que $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*
Soit f une application continue sur $[a,b]$, on appelle ***somme de Riemann*** *de f associée à la subdivision u et à la suite v, le réel*

$$R(f,u,v) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(y_i)$$

Théorème 8 *Soit f une application continue sur $[a,b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $u = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et pour toute famille $v = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de $[a,b]$ vérifiant $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $1 \leq i \leq n$*

$$\delta(u) \leq \eta \Rightarrow \left|\int_{[a,b]} f - R(f,u,v)\right| \leq \varepsilon$$

Corollaire 9 *Soit f une application continue sur $[a, b]$, on note*

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{i(b-a)}{n}) \quad et \quad S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{i(b-a)}{n})$$

Les suites $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l'intégrale de f.
En particulier si f est continue sur $[0, 1]$

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \int_{[0,1]} f = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})$$

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 6 *On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle I si f est continue par morceaux sur tout segment de I.*

Définition 7 *Soit f une fonction continue par morceaux sur I et soient a et b deux éléments quelconques de I (**on ne suppose plus** $a < b$). On note*

$$\begin{array}{lcl} si\ a < b & & \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \\ si\ a > b & & \int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f \\ si\ a = b & & \int_a^b f(x)dx = 0 \end{array}$$

Proposition 10 Relation de Chasles : Si f est continue par morceaux sur un intervalle I , alors

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposition 11 Si f est continue par morceaux et bornée sur un intervalle I, on a

$$\forall (a, b) \in I^2 \qquad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq |b-a| \sup_I |f|$$

4 Intégrales et primitives

4.1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle I

Définition 8 *Soit f une fonction continue sur I, on dit que h est une primitive de f sur I si h est dérivable sur I et si*

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f(x)$$

Proposition 12 Si h_1 et h_2 sont deux primitives de f sur I alors $h_1 - h_2$ est constante sur I.

Théorème 13 *Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$ l'application*

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 14 *Si f est de classe C^1 sur I alors*

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

5 Fonctions complexes

Définition 9 *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I si ses parties réelles et imaginaires sont continues par morceaux sur I . En posant $f_1 = Re\ (f),\ f_2 = Im\ (f)$ on définit :*

$$\forall a, b \in I \int_a^b f = \int_a^b f_1 + i \int_a^b f_2.$$

<u>Conséquences</u>

1.
$$Re\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b Re(f),\ Im\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b Im(f),\ \overline{\left(\int_a^b f\right)} = \int_a^b \overline{f}$$

2. Relation de Chasles :
$$\forall a, b, c \in I \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

3. $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$

4. Si f est continue sur I,la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt,\ x \in I$ est la primitive de f qui s'annule en a.

5.1 Intégration par parties, changement de variables

Les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.

Théorème 15 *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur I, à valeurs réelles ou complexes.*

$$\forall (a, b) \in I^2 \qquad \int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Exemple 1 $\int_1^x \ln(t)dt, \qquad \int_0^x t \arctan(t)dt$

Théorème 16 *Soit φ une fonction de classe C^1 sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ telle que $\phi(J) \subset I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ $(\alpha, \beta) \in J^2$ si f est continue sur I alors*

$$\int_\alpha^\beta (fo\varphi)(t)\varphi'(t) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$$

Théorème 17 *Soit φ une fonction de classe C^1 et strictement monotone sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ telle que $\phi(J) = I$, f étant une fonction continue sur I et $a, b \in I$ on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(u))\phi'(u)du.$$

Corollaire 18 *1) Soit f continue sur $[-a, a]$*

$$\begin{aligned} \textit{si } f \textit{ est paire alors} \int_{-a}^a f(t)dt &= 2\int_0^a f(t)dt \\ \textit{si } f \textit{ est impaire alors} \int_{-a}^a f(t)dt &= 0 \end{aligned}$$

2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt \qquad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_b^{b+T} f(t)dt$$

6 Formules de Taylor

Les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.

6.1 Formule de Taylor avec reste intégral :

Théorème 19 *Soit f une fonction de l'intervalle I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe C^{p+1}sur l'intervalle I*

$$\forall (a,b) \in I^2 \qquad f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$$

Remarque 3 *1) $R_p = \ f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ s'appelle le reste d'ordre p*
2) $0! = 1$ par convention, le premier terme de la somme est donc $f(a)$
3) si $0 \in I \qquad \forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$
4) si f est une fonction polynome de degré n alors le reste d'ordre n est nul.

Exemple 2

1. $e^x = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} + R_p$ si $x > 0$ alors $R_p > 0$
2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1} \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ le signe de R_{2n+1} dépend de la parité de n
3. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + R_p \qquad \forall x > 0$ le signe de R_p dépend de la parité de p.

6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange :

Théorème 20 ***Inégalité de Taylor-Lagrange :***
Soit f une fonction de l'intervalle I dans $\mathbb{K}$ de classe C^{p+1}sur l'intervalle I

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \left| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} M_{n+1},\ M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Exemple 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$

   $\forall x \in \mathbb{R}_- \qquad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$
2. $\lim_{n \to \infty} \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = 0$
3. $\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^4}{24}$

6.3 Formule de Taylor-Young :

Théorème 21 *Si f est une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, si f est p fois dérivable à en un point a de I alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_a((x-a)^p)$$

Remarque 4 *Il s'agit ici d'une formule locale contrairement à toutes les précédentes.*

Exemple 4 Au voisinage de 0

$e^x = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} + o(x^p)$

$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{(2n+2)})$

$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{(2n+1)})$

$shx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{(2n+2)})$

$chx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{(2n+1)})$

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^p)$

$(1+x)^a = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!} x^k + o(x^p)$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k x^k + o(x^p)$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{p} x^k + o(x^p)$

7 Calcul approché d'intégrales

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, et soit $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ la subdivision régulière $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

7.1 Méthode des rectangles

Définition 10 *Sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, on remplace f par la fonction constante qui prend la valeur $f(x_{i-1})$. On obtient une fonction en escalier ayant pour intégrale*

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Théorème 22 *Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$ et si M_1 est un majorant de $|f'|$ sur $[a, b]$ alors on a*

$$\left| R_n - \int_a^b f \right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$$

7.2 Méthode des trapèzes

Définition 11 *Sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, on remplace f par la fonction affine coïncidant avec f en x_{i-1}et en x_i. On obtient une fonction affine par morceaux ayant pour intégrale*

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

Théorème 23 *Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$ et si M_2 est un majorant de $\left| f'' \right|$ sur $[a, b]$ alors on a*

$$\left| T_n - \int_a^b f \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

Remarque 5 *Lorsque l'on remplace dans la méthode des rectangles $f(x_{i-1})$ par $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ et sous les mêmes hypothèses que dans la méthode des trapèzes, on obtient aussi une approximation en $O(\frac{1}{n^2})$.*