MATRICES

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 *On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. On dit aussi matrice de type (n,p) ou matrice de type $n \times p$.*

<u>Notations</u>

Une matrice A est notée $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$ ou en précisant les coefficients

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & s_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On appelle j-ième vecteur colonne le vecteur

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

On appelle i-ème vecteur ligne

$L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$.

En résumé :

$$A = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & s_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 2

1. *Une matrice A est carrée d'ordre n si $n = p$.*
2. *A est une matrice colonne si $p = 1$.*
3. *A est une matrice ligne si $n = 1$.*
4. *Une matrice carrée est triangulaire supérieure si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.*
5. *Une matrice carrée est triangulaire inférieure si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.*
6. *Une matrice carrée est diagonale si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Elle est notée diag$(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$*
7. *Une matrice diagonale est scalaire si $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{ii} = \lambda \in \mathbb{K}$.*
8. *On note I_n la matrice scalaire d'ordre n telle que $I_n =$diag$(1, 1, \cdots, 1)$.*
9. *Si $I' \subset [\![1,n]\!]$ et $J' \subset [\![1,p]\!]$ la matrice $A' = (a_{ij})_{i\in I',\, j\in J'}$ est appelée matrice extraite de la matrice A.*
10. *Etant donné une matrice $(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$ la matrice transposée de A est la matrice $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq n}$*

    où $b_{ij} = a_{ji},\ (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$. La i-ème ligne de A est la i-ème colonne de B. La matrice B est notée ${}^tA$.

11. Une matrice carrrée A est symétrique si ${}^tA = A$, antisymétrique si ${}^tA = -A$

Exemple 3 *1) $A = (a_{ij})_{1\le i\le 5,\ 1\le j\le 4}$, $I' = \{1,3,5\}$,; $J' = \{2,4\}$.*
$A' = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \\ a_{52} & a_{54} \end{pmatrix}$ *est une matrice extraite de A.*
2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

3)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *est symétrique.* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique.*

Notations
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions respactives p et n.
$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base de E.
$\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est une base de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F),\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$.
La matrice

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_p) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a1p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

est la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. On la note $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$. La colonne $C_j,\ j \in [\![1,p]\!]$ est constituée des coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_2$.
Utilisation
Soit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$. On a
$u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right) f_i = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i,\ \ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j.$

Remarque 4 *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ on prend en général une base $\mathcal{B}$ unique et la matrice A de u dans cette base est notée $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.*

Exemple 5 *Matrice de la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite vectorielle $D : y + 2x = 0$ parallèlement à la droite vectorielle $D' : y - x = 0$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.*
On pose $s(e_1) = xe_1 + ye_2$, on a $s(e_1) + e_1 = (x+1)e_1 + ye_2 \in D$ et $s(e_1) - e_1 = (x-1)e_1 + ye_2 \in D'$ ce qui entraine $2(x+1) = -x + 1$ d'où $x = -\frac{1}{3},\ y = -\frac{4}{3}$.
En écrivant de la même manière $s(e_2) = x'e_1 + y'e_2$, on a $s(e_2) + e_2 = x'e_1 + (y'+1)e_2 \in D$ et $s(e_2) - e_2 = x'e_1 + (y'-1)e_2 \in D'$ ce qui entraine $x' = -\frac{2}{3},\ y' = \frac{1}{3}$. On a alors
$A = M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. *En remarquant que $(f_1 = (1,-2),\ f_2 = (1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que*

$D=\mathbb{R}\, f_1,\ D'=\mathbb{R}\, f_2$ on a $s(f_1)=f_1,\ s(f_2)=-f_2$. En définissant $\mathcal{B}'=(f_1,f_2)$ on a
$A'=M_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ matrice diagonale.

1.3 Application linéaire canonique associée à une matrice

Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Il existe $u\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ unique telle que $A=M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$. Cette application linéaire est appelée application linéaire canonique associé à A.

1.4 Matrice canonique d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions respactives p et n.
$\mathcal{B}_1=(e_1,e_2,\cdots,e_p)$ est une base de E.
$\mathcal{B}_2=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ est une base de F.
Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. On considère G un supplémentaire de $\ker u$ dans E. En appelant $r=rgu$ on a $\dim G=r$ d'après le théorème du rang. La restriction de u à G, u_G est un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}u$. On considère $(e'_1,e'_2,\cdots,e'_r)$ une base de G et on complète cette base par $(e'_{r+1},e'_{r+2},\cdots,e'_p)$ base de $\ker u$ pour obtenir une base de E.
$(ue'_1)=f'_1,u(e'_2)=f'_2,\cdots,u(e'_r)=f'_r)$ est une base de $\mathrm{Im}u$que l'on complète par des vecteurs $f'_{r+1},f'_{r+2},\cdots f'_n$ pour obtenir une base de F par le théorème de la base incomplète.
On note $\mathcal{B}'_1=(e'_1,e'_2,\cdots,e'_p)$ et $\mathcal{B}'_2=(f'_1,f'_2,\cdots,f'_n)$ bases respectives de E et de F.

$$A'=M_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(u)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

Cette matrice A' est la matrice canonique de l'application linéaire u. La matrice extraite correspondant à $I'=J'=[\![1,r]\!]$ est une matrice scalaire contenant des 1 sur la diagonale.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 6 *Soient $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$, $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice somme est définie en faisant la somme composante par composante :*
$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.
Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, la matrice $\lambda\, A$ est définie par $\lambda\, A=(\lambda a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.

Proposition 7 *$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de ces opérations a une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel, c'est l'espace vectoriel des applications de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.*

Base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
Soit $(r,s)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, la matrice E_{rs} est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls sauf $a_{rs}=1$.

Proposition 8 *La famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique.*
$\dim\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})=np$

Proposition 9 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés à des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. L'application*
$\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \longrightarrow & M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \end{cases}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel, cette application étant linéaire et à une matrice est associée une application linéaire f unique.*
$\dim \mathcal{L}(E,F) = np$.

Remarque 10 *1) Le sous ensemble $T_n(\mathbb{K})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Une base de ce sous espace est $(E_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$.*
2) Le sous ensemble $D_n(\mathbb{K})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales d'ordre n est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n, une base de ce sous espace est $(E_{ii})_{1\leq i\leq n}$.

Proposition 11 *La transposition des matrices est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.*

Corollaire 12 *La transposition est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices invariantes par cette symétrie sont les matrices symétriques, les matrices antisymétriques ayant pour image leur opposé.*
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

2.2 Produit de matrices

soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1 = (e_k)_{1\leq k\leq r}$, $\mathcal{B}_2 = (f_j)_{1\leq j\leq q}$.
$\mathcal{B}_3 = (g_i)_{1\leq i\leq p}$.
On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. On définit $w = v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$.

$$A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = (a_{jk})_{1\leq j\leq q,\, 1\leq k\leq r}, \quad B = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v) = (b_{ij})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq q}, \quad C = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(w) = (c_{ik})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq k\leq r}.$$

Déterminons la matrice C en fonction des matrices A et B. La traduction vectorielle des matrices A et B est :
$u(e_k) = \sum_{j=1}^{q} a_{jk} f_j$, $v(f_j) = \sum_{i=1}^{p} b_{ij} g_i$. Ce qui entraine :
$w(e_k) = v(\sum_{j=1}^{q} a_{jk} f_j) = \sum_{j=1}^{q} a_{jk} v(f_j) = \sum_{j=1}^{q} a_{jk} \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ij} g_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} b_{ij} a_{jk}\right) g_i$. On a donc
$c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} b_{ij} a_{jk}$.

Définition 13 *La matrice $C \in \mathcal{M}_{p,r}$ ci-dessus est appelée matrice produit des matrices $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et notée $C = BA$ dans cet ordre. Il est bon de noter que pour que le produit ait un sens le nombre de colonnes de B doit être identique au nombres de lignes de A.*

Proposition 14 *Avec les notations précédentes on a : $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v)\, M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$. comme le montre les calculs précédents.*

Exemple 15

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -4 \\ 12 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Popriétés 16 *1. Bilinéarité : $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $A(BC) = (AB)C$.*
$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

2. $E_{ij} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ E_{kl} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ *où* $\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & si\ k \neq l \\ 1 & si\ k = l \end{cases}$

3. $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ {}^t(AB) = ({}^tB)\,({}^tA)$.

La propriété 1 peut être démontrée en associant à chaque matrice l'application linéaire qui lui est canoniquement associée, ce qui revient simplement à remarquer que $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$

Proposition 17 *soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions respectives pet n rapportés à des bases $\mathcal{B}_1 = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$ et $\mathcal{B}_2 = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit : $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}$. etant donné $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ on a $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$ avec $(*)$ $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j,\ i \in [\![1,n]\!]$. En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les égalités ($*$ se traduisent par l'équivalence :*
$y = u(x) \Longleftrightarrow Y = A\,X$ ce qui permet de traduire une égalité vectorielle en égalité matricielle.

2.3 Anneau des matrices carrées d'ordre n

Proposition 18 *$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif si $n \geq 2$ et non intègre. L'élément neutre pour le produit des matrices est la matrice I_n qui représente $Id_{\mathbb{K}^n}$ dans toutes les bases de $\mathbb{K}^n$.*

Proposition 19 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B}$ L'application $\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f \longrightarrow & M_{\mathcal{B}}(f) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux. En particulier $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ le sigle $\simeq$ signifiant "isomorphe à".*

Le produit de matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ montre que cet anneau n'est pas intègre.

Remarque 20 *Sous anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*
1) $T_n(\mathbb{K})$ et $D_n(\mathbb{K})$ sont des sous anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et D =diag$(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n) \in D_n(\mathbb{K})$. On a alors : $DA = \begin{pmatrix} \mu_1 L_1 \\ \mu_2 L_2 \\ \vdots \\ \mu_n L_n \end{pmatrix}$ et $AD = \begin{pmatrix} \mu_1 C_1, \mu_2 C_2, \cdots, \mu_n C_n \end{pmatrix}$

Définition 21 *Les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA = I_n$. Ce sont les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui ont un symétrique pour le produit. On note dans ce cas $B = A^{-1}$.*

Proposition 22 *L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la multiplication a une structure de groupe non commutatif si $n \geq 2$. Ce groupe est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et appelé groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$. Ce groupe est isomorphe à $GL(E)$ pour tout $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension n.*

C'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 23 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de même dimension n rapportés à des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement. une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective si et seulement si $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible et on a alors $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u^{-1}) = A^{-1}$.*

Méthode de détermination de l'inverse d'une matrice inversible

$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est inversible si et seulement si le système de n équations à n inconnues :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=y_i$$

admet exactement une solution pour tout $(y_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{K}^n$.
En effet ceci traduit le fait que l'application linéaire u canoniquement associé à A est bijective.
on a alors $AX=Y\Longleftrightarrow X=A^{-1}Y$.

Exemple 24 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ *On est ramené au système d'équations :*

$$\left\{\begin{array}{rcl}2x_1+x_2+x_3&=&y_1\\x_1+2x_2+x_3&=&y_2\\x_1+x_2+2x_3&=&y_3\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x_1&=&\frac14(3y_1-y_2-y_3)\\x_2&=&\frac14(-y_1+3y_2-y_3)\\x_3&=&\frac14(-y_1-y_2+3y_3)\end{array}\right.\Longleftrightarrow A^{-1}=\frac14\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$$

Proposition 25 *Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*
$AB=I_n\Longrightarrow A$ inversible et $B=A^{-1}$

On se ramène aux endomorphismes canoniques u et v respactivement associés à A et B. L'hypothèse entraine que u est injectif donc bijectif.

2.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 26 *Soit $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. la trace de A est la somme de ses coeffficients diagonaux :*
$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

Proposition 27 *1) L'application Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2) $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ Tr(AB)=Tr(BA)$.

3 Changement de base

3.1 Relations entre les coordonnées

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.
$\mathcal{B}=(e_1,e_2,\cdots,e_n),\ \ \mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\cdots,e'_n)$ deux bases de E. On considère les coordonnées des vecteurs e'_j dans la base $\mathcal{B}$:
$e'_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\,e_i,\ j\in[\![1,n]\!]$.

Définition 28 *On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice :*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1j}&\cdots&p_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nj}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix}$$

La j-ième colonne de cette matrice est constituée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Popriétés 29 *soit* $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$ *les coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B}$ *et* $x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$ *les coordonnées de ce meme vecteur dans la base* $\mathcal{B}'$. *On note*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

les vecteurs colonnes des coordonnées de x *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *respectivement.*
$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i = \sum_{j=1}^{n} x_i e_i$, *ce qui entraine que*
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$. *Ce résultat se traduit matriciellement par :*
$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, X'$. *Il faut noter que ceci donne les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.*

Proposition 30 *La matrice de passage précédente* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *est inversible et* $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

A partir des résultats précédents on a :
$\forall X,\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\, X = X \Longrightarrow P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = I_n \Longrightarrow P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

3.2 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions respactives p et n.
$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}'_1 = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_p)$ sont deux bases de E.
$\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ et $\mathcal{B}'_2 = (f'_1, f'_2, \cdots, f'_n)$ sont deux bases de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u),\ A' = M_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(u)$. On pose $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1},\ Q = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}$.

Proposition 31 *Les matrices* A *et* A' *sont liées par la relation*

$$A' = Q^{-1}\, A\, P$$

Avec les notations précédentes on a $X = PX',\ Y = QY'$ et $Y = AX,\ Y' = A'\, X'$ ce qui entraine
$QY' = APX' \Longleftrightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X \Longleftrightarrow A' = Q^{-1}AP$.

Définition 32 *Deux matrices* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont équivalentes quand il existe* $M \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $N \in GL_p(\mathbb{K})$ *telles que :*
$B = MAN$.

Proposition 33 *si* $E = F$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$, *la relation précédente devient* $A' = P^{-1}AP$.

Définition 34 *Deux matrices* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sont semblables si il existe* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *telles que :*
$B = P^{-1}AP$.

Proposition 35 *Deux matrices semblables ont même trace*

Proposition 36 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Il existe un scalaire unique appelé trace de* u *et noté* $Tr(u)$ *tel que pour toute base* $\mathcal{B}$ *de* E *on ait* $Tr(u) = Tr(M_{\mathcal{B}}(u))$.
L'application $Tr : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K},\ u \longmapsto Tr(u)$ *est une forme linéaire et :* $\forall u, v \in \mathcal{L}(E),\ Tr(u \circ v) = Tr(v \circ u)$.

3.3 Matrice d'une famille finie de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

Définition 37 *La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_p) \in E^p$ est la matrice dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$. Cette matrice est notée $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$.*
$\forall j \in [\![1, p]\!],\ u_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$

Proposition 38 *Si $p = n$, la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est inversible.*

$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est la matrice de l'endomorphisme qui transforme la base $\mathcal{B}$ en la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$. C'est un automorphisme si et seulement si cette famille est une base de E.

4 Matrices par bloc

4.1 Définition

Définition 39 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être écrite en regroupant des sous matrices de A.*
Soient $l, m \in \mathbb{N}^*, (n_1, \ldots, n_l) \in (\mathbb{N}^*)^l, (p_1, \ldots, p_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ tels que $\displaystyle\sum_{t=1}^{l} n_t = n$ et $\displaystyle\sum_{t=1}^{m} p_t = p$..
La matrice A est dit écrite par bloc (ou partitionnée) si A est écrite "divisée" d'une manière cohérente en matrices rectangulaires de dimensions inférieures appelées blocs, on écrit :

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \ldots & B_{lm} \end{pmatrix}$$

tel que : pour $(k, r) \in \{1, \ldots, l\} \times \{1, \ldots, m\}$, la matrice $B_{kr} \in \mathcal{M}_{n_k p_r}(\mathbb{K})$ appelée : le $(k, r)^{\text{ème}}$ bloc dans la décomposition de A en blocs suivant le découpage $(n_1, \ldots, n_l)$ pour les lignes et $(p_1, \ldots, p_m)$ pour les colonnes.

Exemple 40 *1) $\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$, pour $x \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*
2) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
3) En reprenant l'exemple précédent avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donne la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline -1 & -2 & 9 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

4.2 Opérations par bloc

Proposition 41 *: Addition et multiplication par scalaire*
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A et B sont décomposées par blocs avec le même découpage, alors $\lambda A + B$ admet la décomposition en blocs avec le même découpage avec :

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & \dots & A_{lm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & \dots & B_{lm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + B_{11} & \dots & \lambda A_{1m} + B_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{l1} + B_{l1} & \dots & \lambda A_{lm} + B_{lm} \end{pmatrix}.$$

Exemple 42 *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B, B' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), C, C' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D, D' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$$

Proposition 43 *Produit.*
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telles que : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & \dots & A_{lm} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1m'} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l'1} & \dots & B_{l'm'} \end{pmatrix}$ des décompositions en blocs de A et B telles que : $l' = m$ et $(n'_1, \dots, n'_{l'}) = (p_1, \dots, p_m)$ les notations étant celles de la définition.

Alors AB admet la décomposition en blocs : $AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{l'} A_{1j} B_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{l'} A_{1j} B_{jm'} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{l'} A_{lj} B_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{l'} A_{lj} B_{jm'} \end{pmatrix}$

Exemple 44 *Soient : $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

Proposition 45 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & \dots & A_{lm} \end{pmatrix}$ une décomposition en blocs de cette dernière. On a : ${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & \dots & {}^tA_{l1} \\ \vdots & & \vdots \\ {}^tA_{1m} & \dots & {}'A_{lm} \end{pmatrix}$*

Exemple 46 *Soient : $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

$${}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$$

5 Rang d'une matrice

Le rang dune matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille de vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.
$Rg(A) = Rg(C_1, C_2, \cdots, C_p)$.

Remarque 47 *Le rang d'une famille de vecteurs est conservé par un isomorphisme. Si $u \in Isom(E, F)$ et si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E, $Rg(u(\mathcal{F})) = Rg(\mathcal{F})$*

Proposition 48 *1) Le $\mathbb{K}$ espace vectoriel E étant rapporté à une base $\mathcal{B}$, le rang de la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est égal au rang de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$.*
2) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels rapportés à des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Le rang de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est le rang de la matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$.

Ces résultats sont obtenus à partir de la remarque précédente en remarquant qu'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Notation

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < r < \min(n, p)$. On note

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array} \right)$$

Proposition 49 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = Q\, J_r\, P$.*

On démontre ce résultat en considérant l'application linéaire canoniquement associé à la matrice et en reprenant la démonstration de 1.4, la réciproque utilisant la remarque précédente.

Proposition 50 *soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $Rg(A) = Rg({}^tA)$.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Corollaire 51 *Le rang d'une matrice est*
- *Le rang de ses vecteurs colonnes.*
- *Le rang de ses vecteurs lignes.*
- *Le rang de toute application linéaire qu'elle représente.*

Corollaire 52 *Deux matrices équivalentes ont même rang.*

Elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes.

Remarque 53 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $Rg(A) = n$.*

Ceci traduit que l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice est une base de $\mathbb{K}^n$.