PROBABILITES SUR UN UNIVERS FINI

1 Univers ou ensemble fondamental fini

Une expérience est dite aléatoire si on ne peut prévoir de manière certaine son résultat, on parle aussi d'épreuve aléatoire.

1.1 Définitions

Exemple 1 *1. On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. chaque réalisation (ou issue) peut être notée sous forme de singleton,* $\{1\}, \cdots, \{6\}$*. L'ensemble de ces réalisations peut être regroupé sous la forme d'un ensemble* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *que l'on appelle un univers ou ensemble fondamental associé à l'expérience. chaque élément de* E *est appelé éventualité.*

2. *On lance 2 pièces de monnaie, les éventualités pourront être notées* $(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)$ *si les 2 pièces peuvent être distinguées, soit*
   $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$*. s'il n'est pas possible de distinguer les deux pièces, les deux éventualités* (P, F) *et* (F, P) *n'en feront plus qu'une seule.*
3. *On tire 8 cartes, simultanément, d'un jeu de 32 cartes. On peut choisir pour* Ω *l'ensemble des parties de 8 cartes parmi 32.* $|\Omega| = \binom{32}{8}$.
4. *On lance une piéce de monnaie et on s'arrête dès qu'on obtient pile pour la première fois. Il est impossible de préciser le nombre de lancers nécessaires ni même de le majorer. Une représentation rigoureuse de cette expérience nécessite un univers infini.*
   $\Omega = \{P, FP, FFP, \cdots, \underbrace{FF \cdots FP}_{n}, \cdots\}$.

Définition 2 *1. Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont modélisés par un ensemble* Ω*, appelé univers ou ensemble fondamental. On supposera* Ω *fini et non vide. Un élément de* $\omega \in \Omega$ *est appelé éventualité ou issue de l'expérience aléatoire.*

2. *Toute partie de* Ω *est appelée évènement, l'ensemble des évènements est* $\mathcal{P}(\Omega)$*. L'ensemble* Ω *est appelé évènement certain, l'ensemble* $\emptyset$ *est appelé évènement impossible.*
   Un singleton $\{\omega\}$ *est appelé évènement élémentaire.*
   On dit qu'un évènement A *est réalisé si à l'issue de l'expérience* $\omega \in A$*,* ω *étant l'éventualité obtenue au cours de l'expérience.*

1.2 Opérations sur les évènements

Soient Ω un univers fini et A, B des évènements.

1. L'évènement $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des deux évènements est réalisé.
2. L'évènement $A \cap B$ est réalisé si les deux évènements sont réalisés.
3. $\overline{A}$ est l'évement contraire de A, il est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.
4. L'évènement $A - B$ est réalisé si A est réalisé sans que B le soit.
5. L'évènement $A \Delta B$ est réalisé si un et seulement un des deux évènements est réalisé
   $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
6. A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$, ils ne peuvent pas être réalisés simultanémént.
7. $A \subset B$ si la réalisation de l'évenement A entraine la réalisation de l'évenement B. On dit que l'évenement A implique l'évenement B.

Exemple 3 *Dans l'exemple 2 de l'introduction, l'évènement* $A =$*"On obtient au moins un pile" est représenté par :*

$A = \{(P,F),(F,P),(P,P)\}$.
Dans l'exemple 3 l'évènement $A =$"On n'a tiré aucun as" est représenté par l'ensemble des $\binom{28}{8}$ parties de huit cartes qui ne contiennent aucun as.
Dans ce même exemple, l'évènement $B =$"On a tiré au moins un as"$=\overline{A}$. Il peut aussi être représenté comme la réunion des quatre évènements suivants :
$B_i =$"On a tiré exactement i roi(s)", $i \in [\![1,4]\!]$. $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$, ces évènements étant deux à deux incompatibles.

Définition 4 *On dit que la famille $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est un système complet d'évenements de Ω si :*
- $\forall i \in [\![1,p]\!],\ A_i \neq \emptyset$.
- $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i = \Omega$.
  Schématiquement ceci revient à découper Ω en tranches disjointes. On dit aussi que cette famille réalise une partition de Ω.

Exemple 5
- $A \subsetneq \Omega,\ A \neq \emptyset$, $\{A, \overline{A}\}$ *est un système complet d'évenements de Ω.*
- $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ *est un système complet d'évenements de Ω.*
- *Dans l'exemple 3 de l'introduction en notant $C_i =$"On tire exactement i rois parmi les 8 cartes tirées", $(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4)$ est un système complet d'évenements de Ω.*

2 Espaces probabilisés

Il s'agit de répondre à la question : "Quelle chance a l'évènement A de se réaliser" ?

2.1 Définitions

Définition 6 *Soit Ω un univers fini. Une probabilité sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ telle que :*
a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
b) Si A et B sont deux évènements incompatibles on a :
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$: propriété d'additivité.
Un espace probalisé fini est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

2.2 Propriétés

Théorème 7 *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probalisé fini, A et B deux évènements.*
1. *$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.*
2. *$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.*
3. *Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$,on dit que $\mathbb{P}$ est une fonction d'ensemble croissante. Sous l'hypothèse précédente, on a : $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.*
4. *$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.*

Proposition 8 *1) Soient $A_1, A_2, \cdots, A_p$ p évenements deux à deux à deux incompatibles., on a :*
$\mathbb{P}(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)$.
2) Dans le cas général on a : $\mathbb{P}(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)$.

Dans les deux cas on fait une récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 9 *Soit* $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$ *un système complet d'évènements de* Ω.
a) $\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) = 1$.
b) Si $B \subset \Omega, \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i \cap B)$.

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{p} A_i \Longrightarrow B = B \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^{p} (A_i \cap B)$ en utilisant la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion.

2.3 Détermination d'une probabilité

Théorème 10 *1) Soit* $\mathbb{P}$ *une probabilité sur l'univers fini* Ω. *Considérons le système complet d'évenements* $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$. *On définit* $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$. *la famille* $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ *vérifie :*
a) $\forall \omega \in \Omega,\ p_\omega \geq 0$.
b) $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
2) Réciproquement si il existe une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ *vérifiant a et b il existe une probabilité unique sur* Ω *telle que* $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$. $\mathbb{P}$ *est définie par* $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ *pour un évènement* A.

Définition 11 *La probabilité* $\mathbb{P}$ *sur l'univers fini* Ω *est uniforme si les évènements élémentaires ont même probabilité. On dit qu'ils sont équiprobables.*
$\mathbb{P}(\{\omega\} = \dfrac{1}{|\Omega|}$ *d'où, si* $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$. *Ce qui se traduit par :* $\dfrac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$.

Exemple 12 *On dispose de deux jeux de 52 cartes numérotés 1 et 2. On tire une carte de chaque jeu. quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins un roi ?*
On choisit $\Omega = \{(a, b) | a \text{ carte du premier jeu},\ b \text{ carte du deuxieme jeu}\}$,
$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $\mathbb{P} =$ *probabilité uniforme sur* Ω.

<u>*Première méthode*</u>

Définissons les évènements suivants :
$A_1 =$ *"On tire un roi du premier jeu et une carte autre qu'un roi du deuxième jeu".*
$A_2 =$ *"On tire un roi du deuxième jeu et une carte autre qu'un roi du premier jeu".*
$A_3 =$ *"On tire un roi du premier jeu et un roi du deuxième jeu".*

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = (4.48)/52^2 = 192/2704$ $\mathbb{P}(A_3) = 16/2704$. $A =$ *"au moins un roi"* $= A_1 \cup A_2 \cup A_3$, *ces 3 évenements étant 2 à 2 disjoints on a* $\mathbb{P}(A) = 400/2704$.

<u>*Deuxième méthode*</u>

$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}($ *"aucun roi"*$) = 48^2/2704 = 2304/2704$
$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 400/2704$.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Introduction

Une entreprise achète 1000 pièces détachées à un fournisseur A_1 dont 5 pour cent sont défectueuses et 4000 à un fournisseur A_2 dont 3 pour cent sont défectueuses. Une piéce choisise au hasard est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne du fournisseur A_1 ?

Définissons les évènements suivants :
$\Omega =$ "ensemble des pièces détachées".

$D =$ "ensemble des pièces défectueuses".
$A_i =$ "ensemble des pièces provenant du fournisseur $A_i,\ i = 1, 2$.

L'ensemble D devient l'évènement certain.
$Card\ D = 0,05.1000 + 0,03.4000 = 170$. A_1 contenant 50 pièces défectueuses, la probabilité cherchée est $50/170 = \dfrac{50/5000}{170/5000} = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap D)}{\mathbb{P}(D)}$.

3.2 Définition

Définition 13 *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A un évènement de probabilité non nulle, $B \subset \Omega$, on appelle probabilité conditionnelle de B par rapport à A ou probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Proposition 14 *L'application $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1],\ B \longmapsto \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A)$, $\mathbb{P}(A) > 0$, est une probabilité sur Ω.*

Théorème 15 *Formule des probabilités composées*
Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des évènements de $(\Omega, \mathbb{P})$ espace probabilisé fini tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. On a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Récurrence sur $n \geq 2$.
$n = 2$, $\mathbb{P}(A_1|A_2) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}$. Supposons le résultat vérifié pour $n - 1 \geq 2$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})\,\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Exemple 16 *a)On tire successivement et sans remise 3 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 3 rois ?*
Posons $A_i =$ "on tire un roi au ième tirage", $i = 1, 2, 3$.
La probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = 4/52.3/51.2/50.$$

b) On considère la composition en garçons et filles d'une famille de 2 enfants. Un ensemble fondamental est $\Omega = \{(G, G), (G, F), (F, G), (F, F)\}$. Calculons la probabilité des évènements suivants :
$H =$ "la famille a un garçon".
$A =$ "l'aîné est un garçon".
$B =$ "les 2 enfants sont des garçons".

$$\mathbb{P}(B|H) = \frac{\mathbb{P}(B \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = 1/3\ ,\ \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1/2.$$

Cet exemple montre l'importance de bien poser le problème et de se méfier de l'intuition dans les calculs de probabilité conditionnelle.

Théorème 17 *Formule des probabilités totales*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ un système complet d'évenements tel que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$.

$$B \subset \Omega,\ \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

On a $B = \bigcup_{i=1}^{p} (B \cap A_i)$ réunion d'évènements deux à deux incompatibles. $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

Théorème 18 *Formules de bayes*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $B \subset \Omega,\ \mathbb{P}(B) > 0$.

1) Soit $A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) > 0,\ \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\,\mathbb{P}(\overline{A})}$.

2) Soit $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ *un système complet d'évenements tel que* $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \mathbb{P}(A_i) > 0$.

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(Aj)}.$$

Exemple 19 *1) Une urne* A_1 *contient 70 pour cent de boules blanches et une urne* A_2 *80 pour cent de boules blanches. L'urne* A_1 *contient trois fois plus de boules que l'urne* A_2*. On mélange les contenus de* A_1 *et de* A_2 *et on choisit une boule au hasard, elle est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de* A_1 *?*

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\mathbb{P}(A_2)} = \frac{0,7.0,75}{0,7.0,75 + 0,8.0,25} = \frac{21}{29}.$$

2) Une maladie rare affecte une personne sur 10 000. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% si cette maladie est présente, cependant on obtient un résultat faussement positif pour 0,1% des personnes testées.
Un test étant positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?
On utilise les évènements suivants : $T =$ *"le test est positif",* $M =$ *"La personne est malade".*
On connait $\mathbb{P}(M) = 0,0001,\ \mathbb{P}(T|M) = 0,99,\ \mathbb{P}(T|\overline{M}) = 0,001$*, calculer* $\mathbb{P}(M|T)$.

4 Indépendance

Définition 20 *Deux évènements de l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$ *sont indépendants si :*
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Remarque 21 *a) Si* $\mathbb{P}(A) = 0,\ \forall B \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$*. L'évenèment* A *est indépendant de tout évènement* B.
b) Si $\mathbb{P}(A) > 0$ *et* $\mathbb{P}(B) > 0$ *et* A *et* B *indépendants,* $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ *et* $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$*. La réalisation de l'un des évènements n'influe pas sur la réalisation de l'autre évènement.*
c) C'est en général à partir de la nature de l'expérience que l'on peut décider si des évènements sont indépendants. Par exemple dans le cas de tirages avec remise.
d) Il ne faut pas confondre évènements indépendants et incompatibles.
Si $\mathbb{P}(A) > 0$ *et* $\mathbb{P}(B) > 0$ *et si* $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 22 *soient* A *et* B *deux évènements indépendants.* $\overline{A}$ *et* B *sont indépendants,* A *et* $\overline{B}$ *sont indépendants,* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ car $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) = B$ et $(\overline{A} \cap B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Définition 23 *a) Les* n *évènements* $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *sont deux à deux indépendants si :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

b) Les n *évènements* $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *sont mutuellements indépendants si :*

$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i).$$

Des évènements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants, la réciproque est fausse.

Exemple 24 $\Omega = [\![1,4]\!]$, $\mathbb{P} =$ *probabilité uniforme* , $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{2,3\}$.
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{4}$ *les évènements sont deux à deux indépendants mais* $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, *ils ne sont pas mutuellement indépendants.*

Proposition 25 *Si n évènements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellements indépendants, il en est de même de $(A'_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ où $A'_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.*