SERIES NUMERIQUES

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Séries

1.1 Définitions

Définition 1 *1) Soit $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. La série de terme général u_n est la suite (S_n) où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, elle est notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$. S_n est la somme partielle d'ordre n de la série.*
2) La série $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) est convergente : elle admet une limite S dans $\mathbb{K}$ appelée somme de la série et notée $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
Dans le cas contraire on dit que la série diverge. Déterminer la nature d'une série revient à déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarque 2
- *L'étude d'une série revient à l'étude de suites.*
- *Une série est définie par son terme général et non par ses sommes partielles.*
- *Une série peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0, on la note alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$, les sommes partielles sont $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $n \geq n_0$.*
- *La notation $\sum u_n$ représente une série et a toujours un sens alors que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ (ou $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$) n'a de sens que si la série converge.*

Proposition 3 *Condition nécessaire de convergence.*
Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

$u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$

Attention : Cette condition n'est pas suffisante.
Si la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ convergeait on aurait $\lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = 0$ or $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, la série est divergente bien que le terme général tende vers 0.

Remarque 4 *Si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ la série diverge, on dit qu'elle est grossièrement divergente.*
Si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ on ne peut rien en déduire, une étude supplémentaire est nécesssaire.

Proposition 5 *Soit $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geq 0} q^n$ est appelée série géométrique de raison q. Elle converge si et seulement si $|q| < 1$. Si $|q| \geq 1$ elle diverge grossièrement.*

Proposition 6 *Si la série $\sum u_n$ converge et $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$, on définit le reste d'ordre n de cette série par $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. On a alors $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.*

Exemple 7 *Dans le cas de la série géométrique avec $|q| < 1$ on a $R_n = q^{n+1} \frac{1}{1-q} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.*

Définition 8 *Une série téléscopique est une série dont le terme général peut s'écrire sous la forme* $u_n = v_{n+1} - v_n$.

Proposition 9 *La suite* $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si la série* $\sum(v_{n+1} - v_n)$ *converge. Dans ce cas on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to\infty}(v_n - v_0) = \lim_{n\to\infty} v_n \; - \; v_0.$$

Exemple 10

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \; \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}, \; \sum_{k=0}^{\infty} u_k = 1.$$

1.2 Premières propriétés

Proposition 11 *soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *des séries,* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$ *des scalaires. si ces deux séries convergent alors la série* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge et :*
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n \; + \; \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

En résumé

L'ensemble des séries convergentes est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

L'application $\sum u_n \longmapsto S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Remarque 12 *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge alors* $\sum(u_n + v_n)$ *diverge.*
La somme de deux séries divergentes peut converger ou diverger.

Exemple 13 *La série* $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ *converge alors que les séries* $\sum \frac{1}{n}$ *et* $\sum \frac{1}{n+1}$ *divergent.*

Corollaire 14 *On ne change pas la nature d'une série en ajoutant à son terme général le terme général d'une série convergente.*

Proposition 15 *Soit* $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*, la série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si les séries* $\sum Re(u_n)$ *et* $\sum Im(u_n)$ *convergent, dans ce cas on a :*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} Re(u_n) \; + \; i \sum_{n=0}^{\infty} Im(u_n).$$

Exemple 16 $\sum \frac{\cos n}{2^n}$ *et* $\sum \frac{\sin n}{2^n}$ *convergent :*

$$\frac{\cos n}{2^n} + i\frac{\sin n}{2^n} = \frac{e^{in}}{2^n} = \left(\frac{e^i}{2}\right)^n.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\cos k}{2^k} + i\frac{\sin k}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^i}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{e^i}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e^i}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{2 - e^i} = \frac{2(2 - \cos 1)}{5 - 4\cos 1} + i\frac{2\sin 1}{5 - 4\cos 1}$$

d'où la convergence des séries :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n} = \frac{2(2 - \cos 1)}{5 - 4\cos 1} \;\; et \;\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} = \frac{2\sin 1}{5 - 4\cos 1}.$$

2 Séries numériques à termes positifs

2.1 Propriétés

Soit $\sum u_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ dans ces conditions la suite (S_n) est croissante ce qui permet d'en déduire les résultats suivants

Proposition 17 — *Les sommes partielles d'une série dont le terme est positif ou nul convergent ou tendent vers $+\infty$.*
— *Une série de ce type converge si et seulement si les sommes partielles sont majorées.*

2.2 thérème de comparaison

Proposition 18 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$.*
— *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et dans ce cas : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.*
— *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Remarque 19 *Le résultat reste vrai si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 Si les séries convergent on alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n$.*

Exemple 20 $\sum \frac{1}{1+2^n}$ *converge car* $\frac{1}{1+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ *et* $\sum \frac{1}{2^n}$ *est une série géométrique convergente.*
Si $\sum u_n$ converge et $u_n \geq 0$, la série $\sum u_n^2$ converge car

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *entraine :* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq u_n < 1$. *On a alors :* $n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq u_n^2 \leq u_n$. *On peut alors appliquer le théorème de comparaison.*

Corollaire 21 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs (ou à termes positifs à partir d'un certain rang). si $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$) la convergence de $\sum v_n$ entraine la convergence de $\sum u_n$.*

Exemple 22 $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n\, 2^n}$ *converge car* $\frac{\ln n}{n 2^n} = o(\frac{1}{2^n})$

Corollaire 23 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$ les deux séries sont de même nature.*

Proposition 24 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $\forall n \in \mathbb{N},; u_n > 0,\ v_n > 0$. si on a :*

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ *à partir d'un certain rang, la convergence de la série $\sum v_n$ entraine la convergence de $\sum u_n$*

Proposition 25 *Règle de d'Alembert.*
Soit $\sum u_n$ une série à terme général strictement positif. On fait l'hypothèse de l'existence de $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
1) Si $l < 1$ la série converge.
2) Si $l > 1$ la série diverge.
Si $l = 1$ on ne peut pas conclure.

Exemple 26 *1)*$u_n = \frac{1}{n!},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow l = 0$, *la série $\sum \frac{1}{n!}$ est donc convergente..*

2) On montrera ultérieurement que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$.

3) La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$.

2.3 Comparaison série intégrale

Lemme 27 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante. On a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt.$$

Proposition 28 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.*

$$\text{La serie } \sum f(n) \text{ converge} \iff \text{ la suite } \left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

.

Remarque 29 *Le résultat reste vrai si $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$ continue par morceaux et décroissante.*

$$\text{La serie } \sum_{n\geq n_0} f(n) \text{ converge} \iff \text{ la suite } \left(\int_{n_0}^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N},\, n\geq n_0} \text{ converge}$$

.

Exemple 30 *1) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$.*

$f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$, *f est décroissante sur $[2, +\infty[$.*

$\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \longrightarrow +\infty$. *La série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ *est donc divergente.*

2) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

$f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$, *$f$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.*

$\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \longrightarrow \frac{1}{\ln 2}$. *La série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ *est donc convergente.*

Sommes partielles et restes

Sous les hypothèses précédentes, on note $I_n = \displaystyle\int_0^n f(t)dt$. Supposons la série $\sum f(n)$ convergente, La suite (I_n) converge alors vers une limite I.
Soit $N \in \mathbb{N},\ N \geq n+1$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_p^{p+1} f(t)dt \leq f(p) \leq \int_{p-1}^{p} f(t)dt.$$

La relation de Chasles entraine :

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{p=n+1}^{N} f(p) \leq \int_n^N f(t)dt.$$

ce qui est équivalent à :

$I_{N+1} - I_{n+1} \leq \displaystyle\sum_{p=n+1}^{N} f(p) \leq I_N - I_n.$

La série étant convergente, la suite (I_n) l'est également, en posant $I = \lim_{n\to\infty} I_n$, on obtient en faisant tendre N vers l'infini :
$I - I_{n+1} \leq R_n \leq I - I_n$.
Ceci permet un encadrement de l'erreur commise en approximant la somme S de la série par une somme partielle.
Ceci peut également parfois permettre d'obtenir un équivalent de R_n.

Supposons maintenant la série $\sum f(n)$ divergente.
On a, toujours par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^n f(t)dt \leq \sum_{p=0}^{n-1} f(p)$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} f(p) \leq \int_0^n f(t)dt$. On a alors :
$\displaystyle I_n + f(n) \leq \sum_{p=0}^{n} f(p) \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt$. Avec $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$, cet encadrement permet parfois d'obtenir un équivalent de S_n quand n tend vers l'infini.

2.4 Application aux séries de Riemann

Proposition 31 *La série de Riemann* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

$\displaystyle\alpha \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est donc divergente.

Soit $\alpha > 1$ et $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$. Cette fonction est décroissante et positive sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^n f(t)dt = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \longrightarrow \frac{1}{\alpha - 1}$. La suite (I_n) converge donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ également.

Exemple 32 *1) convergence de la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{(1 + 2 + \cdots + n)^\alpha}$.
$\displaystyle 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ (1 + 2 + \cdots + n)^\alpha \sim \frac{(n(n+1))^\alpha}{2^\alpha} \sim \frac{n^{2\alpha}}{2^\alpha},\ u_n \sim \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}$.

Ce qui entraine que cette série est convergente si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

2) Soit $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. *Montrons que la suite* (u_n) *est convergente en montrant la convergence de la série de terme général* $v_n = u_{n+1} - u_n$.

$$v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \text{ d'où}$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \sim \frac{1}{2(n+1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}.$$

La série $\sum v_n$ *converge ce qui entraine la convergence de la suite* (u_n). *Cette limite est appelée constante d'Euler et notée* γ. *Une valeur approchée est* $\gamma \approx 0,5772156649$.

3) Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{7}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc $u_n \sim \dfrac{7}{24n^2}$ *ce qui montre la convergence de la série de terme général* (u_n).

Proposition 33 *Soit $\sum u_n$ une série de terme général positif.*
Règle du $n^\alpha u_n$.
a) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors la série $\sum u_n$ converge.
b) S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
c) S'il existe α et $l \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$ alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 34 *Séries de Bertrand.*
Ce sont les séries de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $\alpha > 1$ la série converge
Soit γ tel que $1 < \gamma < \alpha$.

$$n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln n)^\beta} \longrightarrow 0.$$

Si $\alpha < 1$ la série diverge
Soit γ tel que $\alpha < \gamma < 1$, on a $n^\gamma u_n = \dfrac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \longrightarrow +\infty$.

Si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ la série converge
Comparaison série intégrale : $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\beta} = \left[-\frac{1}{\beta - 1}.\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}}\right]_2^n$ converge.

Si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$ la série diverge
Ce cas a été traité dans un exemple précédent.

3 Séries absolument convergentes

Définition 35 *Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$. La série $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.*

Proposition 36 *Une série absolument convergente est convergente.*

Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $a^+ = \max(a, 0)$ et $a^- = \max(-a, 0)$. On a $a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $\sum u_n$ une série à terme général réel absolument convergente. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$.
$\sum |u_n|$ converge entraine $\sum u_n^-$ et $\sum u_n^+$ convergent respectivement vers S^- et S^+. On a alors $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^-$ qui converge vers $S^+ - S^-$.

Dans le cas où $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ on a de même $\forall n \in \mathbb{N}$, $|Re(u_n)| \leq |u_n|$, $|Im(u_n)| \leq |u_n|$ ce qui entraine la convergence de $\sum |Re(u_n)|$ et de $\sum |Im(u_n)|$ donc de $\sum Re(u_n)$ et de $\sum Im(u_n)$ d'après l'étude précédente, d'où finalement la convergence de $\sum u_n$.

Remarque 37 *1) La réciproque est fausse une série peut être convergente sans être absolument convergente.*
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $u_n = a_{n+1} - a_n$. La série de terme général (u_n) est convergente, c'est une série télescopique et $a_n \longrightarrow 0$ mais
$|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, or al série $\sum \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ est divergente.

2) Les résultats établis pour les séries à terme général positif peuvent être utilisés pour montrer la convergence absolue d'une série : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ est absolument convergente.

4 Applications

4.1 Formule de Stirling

Proposition 38 *On a l'équivalence :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}$.

Démonstration
On pose $w_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$. $\ln w_{n+1} - \ln w_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n e\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$.

$\ln w_{n+1} - \ln w_n = -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\ln w_{n+1} - \ln w_n = -n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{12n^2}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(\ln w_{n+1} - \ln w_n)$ étant convergente, il en est de même de la suite $(\ln w_n)$ et donc de la suite (w_n) également.
On note $K = \displaystyle\lim_{n\to\infty} w_n$. On a $w_n \sim K$. ce qui entraine $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\,K$.

Rappel :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx,\ I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2},\ I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

où I_n est appelée intégrale de Wallis.

On a alors

$$I_{2n} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} K\sqrt{2n}}{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} K^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{K\sqrt{n}}\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{K\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \Rightarrow K = \sqrt{2\pi}$$

ce qui termine la démonstration.

4.2 Représentation décimale d'un réel

Proposition 39 *Pour tout* $x \in [0,1[$ *il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *unique telle que :*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in [\![0,9]\!]$.
- *Pour tout* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *il existe* $n > n_0$ *tel que* $a_n \neq 9$ *c'est à dire que la suite n'est pas constante, égale à 9, à partir d'un certain rang.*
- *On a* $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$, *c'est le développement décimal propre de* x.

Démonstration
On définit $p_n = E(10^n x),\ u_n = p_n 10^{-n},\ n \in \mathbb{N}^*$.
$p_{n+1} \leq 10^{n+1}x < p_{n+1}+1 \Longrightarrow 10p_n \leq p_{n+1} < 10p_n + 10 \Longrightarrow p_{n+1} = 10p_n + c_{n+1},\ c_{n+1} \in [\![0,9]\!]$.
$p_n \leq 10^n x < p_n + 1 \Longrightarrow u_n \leq x < u_n + \dfrac{1}{10^n}$.

$\dfrac{p_{n+1}}{10^{n+1}} = \dfrac{p_n}{10^n} + \dfrac{c_{n+1}}{10^{n+1}} \Longrightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{c_{n+1}}{10^{n+1}}$ d'où

$u_n - u_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{10^k},\ u_0 = E(x) = 0$ d'où $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{10^k}$.
$u_n \leq x < u_n + \dfrac{1}{10^n}$ montre que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{c_k}{10^k}$ converge vers x.
Si $c_p \neq 9$ et $c_k = 9, k \geq p+1$ on a

$\displaystyle\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{p+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^p}$ on a alors

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k} \text{ avec } d_k = \begin{cases} c_k \text{ si} & 1 \leq k \leq p-1 \\ d_p = c_p + 1 & \\ d_k = 0 \text{ si} & k \geq p+1 \end{cases} .$$

Ceci se produit lorsque x est un nombre décimal, le développement décimal propre de $x = \frac{133}{1000}$ est $0,133$ mais on a aussi $x = 0,132999 \cdots 99 \cdots$.
Si $x \in \mathbb{R}+$ on pose $x_0 = E(x)$ et $x = x_0 + (x - x_0)$ où $x - x_0 \in [0,1[$.
Si $10^q \leq x_0 < 10^{q+1},\ x_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k 10^k$.

Proposition 40 *Critère des séries alternées*

On considère une série dont le terme général s'écrit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, sous la forme $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$. On suppose réalisées les conditions suivantes :
(i) la suite (a_n) est décroissante.
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

La démonstration repose sur le fait que les sommes partielles S_{2p} et S_{2p+1} d'ordre respectivement pair et impair sont adjacentes.