OPERATIONS ELEMENTAIRES. SYSTEMES LINEAIRES

1 Opérations élémentaires

1.1 Définitions

Définition 1 *Soit* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle opération élémentaire sur les lignes d'une matrice M *toute opération de l'un des types suivants : En notant* L_i *la i-ème ligne de* M *:*

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, *où* $\lambda \in \mathbb{K}$ *: on ajoute à* L_i *la j-ème ligne de* M *multipliée par* λ.
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *: on multiplie* L_i *par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $L_i \longleftrightarrow L_j$ *: permutation de 2 lignes de M.*

On peut définir de la même manière des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Proposition 2 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* B *une matrice provenant de* A *près une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes,* $Rg(B) = Rg(A)$.

1.2 Traduction en terme de produits matriciels

Proposition 3 *Chaque opération sur les lignes de* A *consiste à multiplier* A *à gauche par une matrice inversible.*
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ *par* $T_{i,j} = I_n + \lambda E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$L_i \leftarrow \lambda L_i$ *par* $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$L_i \longleftrightarrow L_j$ *par* $P_{i,j}(\lambda) = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Chaque opération sur les colonnes de A *consiste à multiplier* A *à droite par une matrice inversible.*
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *par* $T_{j,i} = I_p + \lambda E_{j,i} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
$C_i \leftarrow \lambda C_i$ *par* $D_i(\lambda) = I_p + (\lambda - 1)E_{i,i} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
$C_i \longleftrightarrow C_j$ *par* $P_{i,j}(\lambda) = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i}) \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$.

Exemple 4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A\ (I_3 - (E_{22} + E_{33}) + E_{32} + E_{23})$ *qui échange les colonnes 2 et 3.*

Remarque 5 *1) En passant de* A *à* B *par* n *opérations sur les lignes (respectivement les colonnes) on a* $B = P_n P_{n-1} \cdots P_1 A$ *(respectivement* $B = AQ_1Q_2 \cdots Q_n$*).*
2) $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$, $T_{i,j}(\lambda)$ *est une matrice de transvection,* $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$, $D_i(\lambda)$ *est une matrice de dilatation.*

1.3 Application au calcul du rang

Lemme 6 *Si* $\mu \in \mathbb{K}$ *on a :*

$$Rg \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array} \right) = Rg(A') + 1 \text{ où } A' \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K}).$$

<u>Méthode</u>

- Si $A = 0$, $Rg(A) = 0$.
- Si $A \neq 0$ elle a au moins un coefficient non nul. En permutant éventuellement des lignes (ou des colonnes) on peut supposer que $a_{11} = \mu \neq 0$. On élimine alors $a_{21}, a_{31}, \cdots a_{n1}$ par des opérations élémentaires sur les lignes $L_2, L_3, \cdots, L_n$. On répète le procédé jusqu'à obtenir une matrice dont le rang apparait simplement.

Exemple 7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ *où* $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. *On effectue les opérations suivantes :*
$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1,\ L_4 \longleftarrow L_4 - aL_1$ *ce qui donne*

$$Rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & b-2a & c-3a & d-4a \end{pmatrix} = 1 + Rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ b-2a & c-3a & d-4a \end{pmatrix}$$

On effectue les opérations suivantes :
$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \longleftarrow L_3 - (b-2a)L_1$.
la deuxième ligne est nulle ce qui entraine

$$Rg(A) = 2 + Rg \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+c-2b & 2a+d-3b \end{pmatrix}.$$

D'où les deux cas : 1) $a + c = 2b$ *et* $2a + d = 3b$: $Rg(A) = 3$.
2) $a + c \neq 2b$ *ou* $2a + d \neq 3b$: $Rg(A) = 3$.
Il est bon de noter que la matrice A *n'est jamais inversible.*

Remarque 8 *S'il est possible de transformer par une suite d'opérations élémentaires une matrice carrée* A *en une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux sont non nuls, l'étude précédente montre que* A *est inversible.*

1.4 Application à l'inversion des matrices

Proposition 9 *1) Une matrice inversible peut être transformée en une matrice triangulaire supérieure par une suite d'opérations élémentaires.*
2) Une matrice inversible peut être transformée en la matrice identité par une suite d'opérations élémentaires.

Récurrence sur l'ordre de la matrice.

Exemple 10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$
Première étape $L_i \longleftarrow L_i - L_1,\ i \in [\![2, 4]\!]$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{pmatrix}$$

Deuxième étape : $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2,\ L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Troisième étape : $L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_3$ *conduit à une matrice triangulaire supérieure.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors transformer cette matrices en la matrice identité.

$L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_4,\ L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_4,\ L_1 \longleftarrow L_1 - L_4.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_3,\ L_1 \longleftarrow L_1 - L_3.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On termine par $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant P_i la matrice associée à la i-ème opération, aon a $P_6P_5P_4P_3P_2P_1A = I_4$ ce qui entraine $A^{-1} = P_6P_5P_4P_3P_2P_1 = P_6P_5P_4P_3P_2P_1I_4$. Ce denier résultat montre qu'en appliquant à I_4 les mêmes opérations élementaires que celles de A, dans le même ordre on obtient A^{-1}.

<u>Exercice</u>

Appliquer ce résultat pour déterminer A^{-1}.

2 Systèmes linéaires

2.1 Définitions

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Un système

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

est appelé système de n équations à p inconnues où $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in K^n$ est applelé second membre du système et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est la matrice du système.

Le système est dit homogène si tous les termes du second membre sont nuls.

On appelle solution de (S) tout p-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations du système.

Le rang de A est appelé rang du système.

2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soit (S_0) le système homogène associé à (S). L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ de S_0 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Si l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) est non vide :

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ où $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathcal{S}$, c'est donc un sous espace affine de $\mathbb{K}^p$ s'il est non vide.

2.3 Interprétation d'un système linéaire

1) Interprétation Matricielle.

Le système est équivalent à $AX = B$ avec X matrice colonne des x_j est B matrice colonnes des $b_j, j \in [\![1, p]\!]$.

Si $n = p$ et si A est inversible on dit que c'est un système de Cramer. Il a alors une solution unique : $X = A^{-1}B$.
2) Interprétion vectorielle.
En notant c_j la j-ième colonne de A (S) est équivalent à :
$\sum_{j=1}^{p} x_j C_j = B$.
(S) admet une solution si et seulement si $B \in \text{Vect}(C_1, C_2, \cdots, C_p)$.
3) Interprétation à l'aide d'une application linéaire.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A. En notant $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ (S) est équivalent à $u(x) = b$.
(S) a une solution si et seulement si $b \in \text{Im} u$. soit x_0 une solution de (S)
$\mathcal{S} = x_0 + \ker f$ avec $\dim \ker f = p - r$, r étant le rang du système,c'est à dire de A.
4) Interprétation à l'aide de formes linéaires.
En posant $\phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \sum j = 1^p a_{ij} x_j, i \in [\![1, n]\!]$, phi_i est une forme line linéaire sur $\mathbb{K}^p$ et (S) est équivalent à :
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_p) = b_i$. $\mathcal{S}$ est alors l'interstion de n hyperplans affines.

Exemple 11 $\left\{\begin{array}{lcr} x+y+z+t & = & 1 \\ x+2y+3z+4t & = & -1 \\ x+3y+6z+10t & = & -2 \\ x+4y+10z+20t & = & 2 \end{array}\right. \quad L_i \longleftarrow L_i - L_1,\ i \in [\![2, 4]\!].$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t & = & 1 \\ y+2z+3t & = & -2 \\ 2y+5z+9t & = & -3 \\ 3y+9z+19 & = & 1 \end{array}\right. \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2,\ L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_2.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t & = & 1 \\ y+2z+3t & = & -2 \\ z+3t & = & 1 \\ 3z+10t & = & 7 \end{array}\right. \quad L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_3.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t & = & 1 \\ y+2z+3t & = & -2 \\ z+3t & = & 1 \\ t & = & 4 \end{array}\right.$$

$t = 4,\ z = 1 - 3t = -11,;\ y = -2 + 22 - 12 = 8,\ x = 1 - 8 + 11 - 4 = 0,\ \mathcal{S} = \{(0, 8, -11, 4)\}$