VARIABLES ALEATOIRES

1 Variables aléatoires

1.1 Définitions

Définition 1 *Une variable sur un univers fini Ω, à valeurs dans un ensemble E est une application $X : \Omega \longrightarrow E$. Si $E = \mathbb{R}$,on dit que X est une variable réelle.*

Remarque 2 *L'ensemble image $X(\Omega)$ est fini, mais E peut ne pas l'être.*

Exemple 3 *a) On tire 3 cartes d'un jeu de 32 cartes, X =nombre de rois obtenus.*
Ω = ensemble des parties de 3 cartes du jeu de 32 cartes. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
b) On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$
X_i =numéro obtenu au tirage $i, i \in \{1, 2\}$
On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2$, $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

Définition 4 *Soit X une variable aléatoire et u une application définie sur $X(\Omega)$, $u \circ X$ est une variable aléatoire définie sur Ω et notée $u(X)$.*

Exemple 5 *Dans a ou b, $u(x) = x^2$, la variable aléatoire $u(X)$ est notée X^2.*

Notation des évènements liés à une variable aléatoire
Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $A \subset E$.
. $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}$ est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$, c'est donc un évenement.
. si $A = \{x\}$, $X^{-1}(\{x\})$ est noté $\{X = x\}$ ou $(X = x)$, c'est l'ensemble des antécédents de $x \in E$.
. Si $E = \mathbb{R}$, $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$. On définit de la même manière $(X \geq x)$, $(X < x)$, $(X > x)$.
. Soient $A, B \subset E$ ou E quelconque .
$(X \in (A \cup B)) = (X \in A) \cup (X \in B)$, $(X \in (A \cap B)) = (X \in A) \cap (X \in B)$, $(X \in (E - A)) = \overline{(X \in A)}$.
Si $A \subset X(\Omega)$, on a $(X \in A) = \bigcup\limits_{x \in A} (X = x)$, sinon $(X \in A) = \bigcup\limits_{x \in A \cap X(\Omega)} (X = x)$.

Exemple 6 *Reprenons l'exemple b précédent.*
$(S = 7) = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$. $(S \leq 4) = \{(1, 1), (1, 2)(1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$.

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Théorème-définition 7 *Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. L'application : $\mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0, 1]$, $A \longmapsto \mathbb{P}(X \in A)$ est une probabilité sur $X(\Omega)$ appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X est notée $\mathbb{P}_X$. $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $A \subset X(\Omega)$.*

Proposition 8 *Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire . $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évenements associé à X et $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(\{x\}) = 1$.*

Proposition 9 *Soient $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $A \subset X(\Omega)$. $\mathbb{P}_X(A) = \sum\limits_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$, autrement dit connaitre la loi de X revient à connaitre $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in X(\Omega)$.*

Exemple 10 *Exemple b du début.*
$(S = k) = \{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i + j = k\}$, $k \in [\![2, 12]\!]$. on doit avoir
$j = k - i$, $1 \leq i \leq 6$, $1 \leq k - i \leq 6 \Rightarrow k - 6 \leq i \leq k - 1$ car $i = k - j \leq k - 1$, $(j \geq 1)$.
Ceci entraine : $\max(1, k - 6) \leq i \leq \min(k - 1, 6)$. Il y a deux cas possibles :
a) $2 \leq k \leq 6 \Longrightarrow 1 \leq i \leq k - 1$ d'où $|(S = k)| = k - 1$ et donc $\mathbb{P}(S = k) = \dfrac{k - 1}{36}$.
b) $7 \leq k \leq 12 \Longrightarrow k - 6 \leq i \leq 6$ d'où $|(S = k)| = 6 - (k - 6) + 1 = 13 - k$ et donc $\mathbb{P}(S = k) = \dfrac{13 - k}{36}$.

Remarque 11 *Deux variable aléatoire peuvent avoir la même loi sans être identiques. On lance une piéce équilibrée, on appelle X le nombre de piles et Y le nombre de faces. $X \neq Y$ et pourtant elles suivent la même loi* $\mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}_X(\{1\}) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}_Y(\{0\}) = \mathbb{P}_Y(\{1\}) = \dfrac{1}{2}$.

Proposition 12 *Soit X une variable aléatoire réelle telle $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$.*
$\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$.

Exemple 13 *1) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules avec remise.*
X est le plus grand numéro tiré. Loi de X. On note X_i le numéro obtenu au i-ème tirage :
$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, \cdots, X_n \leq k) = \dfrac{k^n}{N^n}$, $\mathbb{P}(X \leq k) = \dfrac{k^n}{N^n} - \dfrac{(k-1)^n}{N^n}$.

2) Das le cas d'un tirage sans remise, avec $n \leq N$, on choisit $n-1$ boules parmi les $k-1$ boules portant un numéro compris entre 1 et $k-1$.
$\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{N}{k}}$.

Proposition 14 *soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et u une application définie sur $X(\Omega)$. La loi de la variable aléatoire $u(X)$ est donnée par :*

$$\forall y \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(u(X) = y) = \sum_{x \in u^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

En effet on a :

$$(u(X) = y) = \left(X^{-1}(u^{-1}(\{y\}))\right) = \left(X \in u^{-1}(\{y\}))\right) = \bigcup_{x \in u^{-1}(\{y\}))} (X = x))$$

Exemple 15 *On lance à deux reprises un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire différence entre le premier numéro obtenu et le deuxième.*
Loi de X, $|X|$et X^2.

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2,\ X(\Omega) = [\![-5, 5]\!],\ \ (X = k) = \{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i - j = k\} = \{(j + k, j) \in [\![1, 6]\!]^2\}.$$

Premier cas : $0 \leq k \leq 5 \Longrightarrow j \leq j + k$.
On doit avoir $1 \leq j \leq j + k \leq 6$ *c'est à dire* $j \in [\![1, 6-k]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{6-k}{36}$.

Deuxième cas : $-5 \leq k \leq -1 \Longrightarrow j + k < j$.
On doit avoir $1 \leq j + k \leq j \leq 6$ *c'est à dire* $1 - k \leq j \leq 6$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{6 - (1-k) + 1}{36} = \dfrac{6+k}{36}$
En résumé $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{6 - |k|}{36}$.

Loi de $|X|$.
$|X|(\Omega) = [\![0, 5]\!]$, $k \neq 0$, $\mathbb{P}(|X| = k) = \mathbb{P}(X = -k) + \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{6-k}{18}$, $\mathbb{P}(|X| = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{6}$.

Loi de X^2.
$X^2(\Omega) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$, $\mathbb{P}(X^2 = k) = \mathbb{P}(|X| = \sqrt{k}) = \dfrac{6 - \sqrt{k}}{18}$, $k \neq 0$, $\mathbb{P}(X^2 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{6}$.

2 Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire réelle

Dans cette partie les variables aléatoires sont réelles.

2.1 Espérance mathématique

Définition 16 *L'espérance mathématique ou espérance d'une variable aléatoire réelle X définie sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ est le réel :*
$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}_X(\{x\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X = x)$.
C'est la moyenne pondérée des valeurs prises par X.
Si $E(X) = 0$, on dit que la variable est centrée.
Lorsque X représente le gain (ou la perte) à un jeu, on dit que le jeu est équitable si $E(X) = 0$

Exemple 17 *On lance un dé équilibré, X=numéro obtenu.*
1) $E(X) = \frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$. *2) Exemple 10 :* $E(X) = \sum_{k=2}^{6} k\,\frac{k-1}{36} + \sum_{k=7}^{12} k\,\frac{13-k}{36} = 7.$

2.2 Propriétés

Proposition 18 *Soit X variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :*
$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

On a $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}\right) = \sum_{\omega \in (X=x)} \mathbb{P}(\{\omega\})$, d'où
$x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in (X=x)} \mathbb{P}(\{\omega\})\, X(\omega)$. D'où le résultat de la proposition lorsque x décrit $X(\Omega)$ car
$\bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x) = \Omega$.

Théorème 19 *L'application $X \longmapsto E(X)$ où X variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ est linéaire : X, Y variables aleatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*
$\lambda \in \mathbb{R},\ E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Il s'agit d'une application directe de la proposition précédente.

Corollaire 20 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ sous les hypothèses précédentes on a $E(aX + b) = aE(X) + b$.*

Exemple 21 *Exemple 10 du lancer de deux dés. $S = X + Y$ où X est le numéro obtenu au premier lancer et Y celui obtenu au deuxième.*
$E(S) = 2E(X) = 7$.

Proposition 22 *1) Soit X variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée.*
2) Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.
3) Soit Y une deuxième variable aléatoire telle que $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.
4) Soit X variable aléatoire positive ou nulle telle que $E(X) = 0$ alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, on dit que X est presque surement nulle.

Théorème 23 *Inégalité de Markov*
Soit X variable aléatoire positive sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a :
$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{a}E(X)$.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X = x) \geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} x\, \mathbb{P}(X = x) \geq a \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} \mathbb{P}(X = x) = a\, \mathbb{P}(X \geq a).$$

Théorème 24 *Théorème de transfert*
Soit X variable aléatoire sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et u une application définie sur $X(\Omega)$, on a :
$E(u(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\,\mathbb{P}(X = x)$.

Ce théorème évite d'avoir à déterminer la loi de $u(X)$, seule la loi de X est nécessaire.
$E(U(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} u(X(\omega))\,\mathbb{P}(\{\omega\})$ (proposition 18).
$E(u(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in (X=x)} u(x)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x) \sum_{\omega \in (X=x)} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\,\mathbb{P}(X = x)$.

2.3 Variance

Définition 25 *a) Le moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ d'une variable aléatoire réelle X définie sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ est le réel :*
$E(X^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k\,\mathbb{P}(X = x)$.
b) La variance de la variable aléatoire X est :
$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.
c) L'écart type de la variable aléatoire X est :
$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.

Remarque 26 *L'écart type mesure une dispersion moyenne des valeurs prises par X par rapport à $E(X)$.*

Théorème 27 *Formule de Koenig-Huygens*
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Remarque 28 *Le théorème de transfert permet d'obtenir $Var(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$ mais ce calcul est en général plus délicat que la formule précédente.*

Exemple 29 *lancer d'un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 (exemple 17) X est le numéro obtenu. On a obtenu $E(X) = \frac{7}{2}$.*
$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{1}{6} = \frac{6.7.13}{36} = \frac{91}{6}$, $Var(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$.

Proposition 30 *1) $Var(X) \geq 0$.*
2) $Var(X) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = E(X)) = 1$, c'est à dire si et seulement si X est presque surement constante. 2) Soit $a \in \mathbb{R}$, on a $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Définition 31 *Une variable aléatoire réelle X est centrée réduite si $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.*

Proposition 32 *Si X est une variable aléatoire réelle telle que $Var(X) \neq 0$ la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.*

fonction génératrice d'une loi de probabilité

Définition 33 *Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.*
La fonction génératrice de (la loi de) X est la fonction polynomiale définie par :
$G_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) t^k = E(t^X)$.

Proposition 34 $G'_X(1) = E(X),;\ G''_X(t) = E(X(X - 1))$.

2.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 35 *Soit X une variable aléatoire réelle et $\epsilon_i n\mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(|X-E(X)|\geq\epsilon\right)\leq\frac{Var(X)}{\epsilon^2}.$$

application de l'inégalité de Markov à $Y=(X-E(X))^2$. On a aussi :
$\mathbb{P}\left(|X-E(X)|<\epsilon\right)\geq 1-\dfrac{Var(X)}{\epsilon^2}$ en utilisant l'évènement contraire.

3 Lois usuelles

3.1 Loi uniforme

Définition 36 *La loi uniforme est caractérisée par : $n\in\mathbb{N}^*$, $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{n}$.*
$X(\Omega)$ peut également être un ensemble fini de cardinal n. On note $X\sim_{\text{“suit''}} U(X(\Omega))$.

Exemple du lancer d'un dé équilibré : $X(\Omega)=[\![1,6]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{6}$.

Proposition 37 *Soit $X\sim U([\![1,n]\!])$, on a :*
$E(X)=\dfrac{n+1}{2}$, $Var(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$

3.2 Loi de Bernoulli

Une épreuve de bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles, l'une appelée “succès” et notée 1, l'autre appelée “échec” et notée 0.

Définition 38 *Une variable aléatoire aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p\in[0,1]$, si $X(\Omega)\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1)=p$ d'où $\mathbb{P}(X=0)=1-p$. On dit aussi que X est une variable de Bernoulli de paramètre p.*
On note $X\sim\mathcal{B}(p)$

Exemple 39 *1) Lancer d'une pièce de monnaie : $p=\dfrac{1}{2}$.*
2) Tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes. “sucès”=“on tire un roi” : $p=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$

Proposition 40 *Soit $X\sim\mathcal{B}(p)$, $E(X)=p$, $Var(X)=p(1-p)$.*

3.3 Loi binomiale

Théorème-définition 41 *On considère une suite de $n\in\mathbb{N}^*$ épreuves de Bernoulli indépendantes, X est le nombre de succès (de 1) obtenus :*
$X(\Omega)=[\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n,p) et on note $X\sim\mathcal{B}(n,p)$.

L'évènement $(X=k)$ est la réunion disjointe des évènements
$A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$=“On a succès aux épreuves $i_1,i_2,\cdots,i_k$ et échec aux $n-k$ autres épreuves”
avec $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$.
$\mathbb{P}(A_{i_1,i_2,\cdots,i_k})=p^k(1-p)^{n-k}$ et il y a $\dbinom{n}{k}$ tels évenements.

Proposition 42 *Soit $X\sim\mathcal{B}(n,p)$, $E(X)=np$, $Var(X)=np(1-p)$.*

Il est plus simple d'utiliser la fonction génératrice que de faire un calcul direct.
$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\, t^k = (pt+q)^n$ ou $q = 1-p$.
$G'_X(t) = np(pt+q)^{n-1},\ E(X) = G'_X(1) = np.$
$G''_X(t) = n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2},\ n \geq 2,\ E(X(X-1)) = G''_X(1) = n(n-1)p^2 = E(X^2) - E(X)$ d'où :
$E(X^2) = n^2p^2 - np^2 + np \Rightarrow Var(X) = np(1-p).$

3.4 Loi géométrique

Cette loi ne figure pas au programme mais représente une utilisaton intéressante de séries.
On répète des épreuves de bernoulli indépendantes, de probabilité de succès p, jusqu'à l'obtention du premier succès.
Ω est infini. $\Omega = \{S, ES, EES, \cdots, \underbrace{EE\cdots ES}_{n\ termes}, \cdots\}$.
X est le nombre de répétions nécessaires pour obtenir le premier succès.
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}\, p.$

3.5 Loi hypergéométrique.

Autre loi ne figurant pas au programme.
On choisit n objets parmi $N \geq n$ objets de deux types notés I et II. X représente le nombre d'objets de type I parmi les n objets. Il existe d objets de type I.

$$p_X(k) = \frac{C_n^k C_{N-d}^{n-k}}{C_N^n}\ ,\ \max(0, n-(N-d)) \leq k \leq \min(n, d)$$

4 Couples de variables de variables aléatoires

4.1 Définition

Définition 43 *soit Ω un univers fini et X, Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs respectivement dans les ensembles E et E' :*
$X : \Omega \longrightarrow E,\ Y : \Omega \longrightarrow E'$.
L'application $Z : \Omega \longrightarrow E \times E',\ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est appelée couple de variables aléatoires sur Ω. On note $Z = (X, Y)$. Si $E, E' \subset \mathbb{R}$, Z est appelé couple de variables aléatoires réelles.

Remarque 44 *On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, l'inclusion pouvant être stricte.*

Définition 45 *La loi de probabilité de Z est appelée loi conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y) ;*
$A \subset Z(\Omega),\ \mathbb{P}_Z(A) = \mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}(Z^{-1}(A))$.
$\mathbb{P}(Z = (x, y)) = \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$ est noté $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Exemple 46 *On lance deux dés. X est le plus petit des deux nombres obtenus, Y est le plus grand des deux nombres obtenus (de 1 à 6), loi du couple $Z = (X, Y)$. Il suffit de déteriner les valeurs possibles de $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$.*
$i > j,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0,\ \ i = j,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\{(i, i)\}) = \frac{1}{36}$
$i < j,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\{(i, j), (j, i\}) = \frac{1}{18}$.

4.2 Lois marginales

Définition 47 *Les lois des variables aléatoires X et Y sont appelées lois marginales du couple $Z = (X, Y)$.*

Théorème 48 $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X=x) = \displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$
$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}(Y=y) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

On a $(X=x) = (X=x) \cap \left(\displaystyle\bigcup_{y\in Y(\Omega)} (Y=y)\right) = \displaystyle\bigcup_{y\in Y(\Omega)} ((X=x)\cap(Y=y))$, c'est une réunion d'évènements deux à deux incompatibles.

Exemple 49 *Reprenons l'exemple précédent.*
$\mathbb{P}(X=i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i, Y=i) + \sum_{j=i+1}^{6} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{1}{36} + 2\frac{6-i}{36} = \frac{13-2i}{36},\ i \in [\![1,6]\!].$
$\mathbb{P}(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{2j-1}{36},\ j \in [\![1,6]\!].$

Remarque 50 *La connaissance des lois marginales ne permet pas, en général, de connaitre la loi conjointe.*

Exemple 51 *Loi conjointe et lois marginales*
Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires. On tire deux boules de l'urne sans remise. X (respectivement Y) prend la valeur 1 si la première boule (respectivement la deuxième) est blance, 0 sinon.
$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0|X=0) = \frac{5}{8}.\frac{4}{7} = \frac{5}{14},\ \mathbb{P}(X=0, Y=1) = \frac{5}{8}.\frac{3}{7} = \frac{15}{56}$
$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \frac{3}{8}.\frac{5}{7} = \frac{15}{56},\ \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{3}{8}.\frac{2}{7} = \frac{3}{28}.$

$X \backslash Y$	*0*	*1*	$\mathbb{P}_X$
0	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{8}$
1	$\frac{15}{56}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{8}$
$\mathbb{P}_Y$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	

4.3 Lois conditionnelles

Définition 52 *Soient $Z = (X,Y)$ un couple de variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y) > 0$. On définit $\mathbb{P}_{(Y=y)}(A) = \mathbb{P}(A|(Y=y)),\ A \subset \Omega$, c'est une probabilté sur Ω. La loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ est la loi de X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_{(Y=y)})$:*

$$\mathbb{P}_{(Y=y)}(X=x) = \mathbb{P}(X=x|Y=y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}.$$

On définit de mçme la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ avec $\mathbb{P}(X=x) > 0$

5 Variables indépendantes

Définition 53 *Soient X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Elles sont indépendantes si :*
$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),$ *les evenements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont independants :*

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B).$$

Proposition 54 *Les variables aleatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

On a $\mathbb{P}((X\in A)\cap(Y\in B)) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x,y)\in A\times B}(X=x,Y=y)\right) = \sum_{(x,y)\in A\times B}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$.

Remarque 55 *Dans le cas où X et y sont indépendantes, la connaissance des lois marginales permet de retrouver la loi conjointe.*

Proposition 56 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur l'espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$ et $f : X(\Omega) \longrightarrow E$ et $g : Y(\Omega) \longrightarrow E'$ deux applications. Les variables $f(X)$et $g(Y)$ sont indépendantes.*

Soient $A \subset f(X(\Omega)),\ B\subset g(Y(\Omega)),\ \mathbb{P}((f(X)\in A)\cap(g(Y)\in B)) = \mathbb{P}(X\in f^{-1}(A))\,\mathbb{P}(Y\in g^{-1}(B))$.

Proposition 57 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes on a $E(XY) = E(X)\,E(Y)$*

On utilise le théorème de transfert avec $T = u(X,Y) = XY$.
La réciproque de cette proposition est fausse : $E(XY) = E(X)\,E(Y) \not\Rightarrow X,\ Y$ indépendantes.
Considérons le couple de variables aleatoires $Z = (X,Y)$ X et Y prant les valeurs $-1, 0$ et1 dont la loi conjointe est définie par le tableau suivant :

X \ Y	-1	0	1	$\mathbb{P}_X$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}_Y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$E(XY) = \sum_{x=-1}^{1}\sum_{y=-1}^{1} xy\,\mathbb{P}(X=x,Y=y) = 0$, on a $E(X) = 0 \Longrightarrow E(XY) = E(X)\,E(Y)$ mais
$\mathbb{P}(X=0,Y=0) = 0 \neq \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{4}$, les variables Xet Y ne sont pas indépendantes.

5.1 Généralisation aux n-uplets de variables aléatoires

Définition 58 *soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires sur l'univers Ω, a valeurs respectivement dans $E_1, E_2, \cdots, E_n$. L'application*
$\Omega \longrightarrow E_1\times E_2\times\cdots\times E_n,\ \omega \longmapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ est appelé n-uplet de variables aléatoires sur Ω, il est noté $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = \mathbb{R}$, il est appelé n-uplet de variables aléatoires réelles.
La loi de $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est appelée loi conjointe du n-uplet, les lois de $X_1,\ \cdots,\ X_n$sont appelées lois marginales du n-uplet.
La loi conjointe est déterminée par les valeurs de $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n),\ (x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$.

Théorème 59 *Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires, pour tou $k \in [\![1,n]\!]$ on a :*

$$\mathbb{P}(X_k = x_k) = \sum_{(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n).$$

Définition 60 *Les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, ou simplement indépendantes, $n\geq 2$ si pour tout $A_i \subset E_i,\ i\in[\![1,n]\!]$ les n évènements $(X_i\in A_i)$ sont indépendants.*

Proposition 61 *Les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes, si et seulement si pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$, les évenements $(X_i = x_i),\ i\in[\![1,n]\!]$ sont indépendants.*

Proposition 62 *Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ indépendantes et f_i des applications définies sur $X_i(\Omega),\ i\in[\![1,n]\!]$ les variables aléatoires $f_i(X_i)$, $[1,n]\!]$ sont indépendantes.*

6 Covariance

Définition 63 *soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé fini. La covariance de X et Y est :*
$Cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y)\right)$.

Proposition 64 *1) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.*
2) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$.

Rappel : $E(XY) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}(X=x, Y=y)$

Théorème 65 *On a*
$$|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\,\sigma(Y)$$
l'églaité étant obtenue si et seulement si il existe deux réels a, b tels que $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$.

On utilise : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ Var(\lambda X + Y) \geq 0$.