DEVELOPPEMENTS LIMITES

1 Developpements limites

1.1 Definitions

Définition 1 *Soit I un intervalle ouvert contenant x_0 ou d'extrémité x_0, soit f une fonction définie sur I sauf peut-être en x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 si il existe un polynome P_n de degré inférieur ou égal à n tel que*

$$\forall x \in I \qquad f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

$P_n(x - x_0)$ est appelé la partie régulière du DL, $f(x) - P_n(x - x_0)$ est appelé le reste du DL.

Remark 1 *1) si P_n est non nul et si son terme de plus bas degré est $a_k x^k$ alors $f(x) \sim_{x_0} a_k(x - x_0)^k$ et on dit que $a_k(x - x_0)^k$ est la partie principale du DL*
2) f admet un DL à l'ordre n en x_0 si et seulement si la fonction $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(X) = f(x_0 + X)$ admet un DL à l'ordre n en 0.

Théorème 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 et n fois dérivable en x_0 la formule de Taylor-young fournit un DL à l'ordre n en x_0*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Remark 2 *1) f admet un DL à l'ordre $0 \Leftrightarrow f$ continue en x_0*
2) f admet un DL à l'ordre $1 \Leftrightarrow f$ dérivable en x_0
3) attention f peut admettre un DL à l'ordre 2 en x_0 sans que $f''(x_0)$ existe : $f(x) = x^3 \cos \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0 \qquad f(0) = 0$

Proposition 1 *Si f admet un DL à l'ordre n en x_0 alors il est unique*

Proposition 2 *Si f admet un DL à l'ordre n en x_0 alors il admet un DL à l'ordre $p \leq n$*

Proposition 3 *Si f admet un DL à l'ordre n en 0 et si f est une fonction paire (resp impaire) alors P_n est un polynone paire (resp impair) et il ne contient que des termes de degré pairs (resp impairs)*

Définition 2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I du type $[a, +\infty[$ (resp$]-\infty, a]$), on dit que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp$-\infty$) si il existe un polynome P_n de degré inférieur ou égal à n tel que*

$$f(x) = P_n(\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x^n})$$

Proposition 4 *Si f admet un DL à l'ordre n en $+\infty$ ou $-\infty$ alors il est unique*

Proposition 5 *Si f admet un DL à l'ordre n en $+\infty$ ou $-\infty$ alors il admet un DL à l'ordre $p \leq n$*

1.2 Opérations sur les DL

Théorème 2 *Soient f et g deux fonctions admettant un DL à l'ordre n en x_0 de partie régulière Pn et Q_n*
*1) $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha f + \beta g$ **admet un DL à l'ordre** n **en** x_0 de partie régulière $\alpha P_n + \beta Q_n$*
*2) fg **admet un DL à l'ordre** n **en** x_0 de partie régulière R_n avec $P_n Q_n = R_n + S_n$,où R_n est un polynome de degré inférieur ou égal à n et S_n un polynome de valuation supérieure ou égal à n c'est à dire ne possèdant que des termes de degré supérieur à n*

Théorème 3 *Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n en x_0 de partie régulière P_n et g une fonction admettant un DL à l'ordre n en $y_0 = f(x_0)$ de partie régulière Q_n. gof **admet un DL à l'ordre** n **en** x_0 de partie régulière $R_n$avec $Q_n o P_n = R_n + S_n$,où R_n est un polynome de degré inférieur ou égal à n et S_n un polynome de valuation supérieure ou égal à n c'est à dire ne possèdant que des termes de degré supérieur à n*

Théorème 4 *Soient f et g deux fonctions admettant un DL à l'ordre n en x_0 avec $g(x_0) \neq 0$. **La fonction** $\frac{f}{g}$ **admet un DL à l'ordre** n **en** x_0*

Théorème 5 Primitivation d'un développement limité.
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert contenant x_0 et admettant un DL à l'ordre n en x_0 de partie régulière Pn et soit F une primitive de f. ***F admet un Dl à l'ordre*** $n+1$ ***en*** x_0 *de partie régulière Q_{n+1} tel que $Q'_{n+1} = P_n$ et $Q_n(0) = F(x_0)$.*
Si $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$.
On a $F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1})$.

2 Applications

2.1 Détermination de limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x^3 - \sin^3 x}.$$

$2x^3 - \sin^3 x = x^3 + o(^3) \Rightarrow 2x^3 - \sin^3 x \sim x^3$.
$x(1+\cos x)2 - \tan x = 2x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - (2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{7}{6}x^3$. d'où

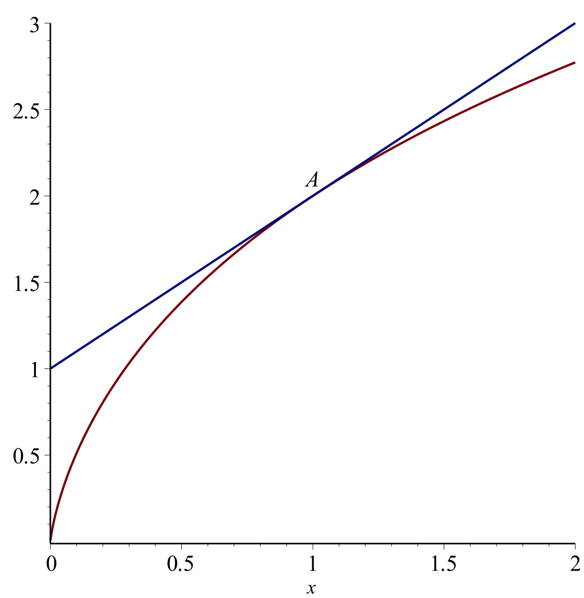
$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x^3 - \sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{6}x^3}{x^3} = -\frac{7}{6}.$$

2.2 Position d'une courbe par rapport à une tangente, à une asymptote

Développement limité de $f(x) = \dfrac{2x\ln x}{x-1}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

$$f(x) = 2 + (x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

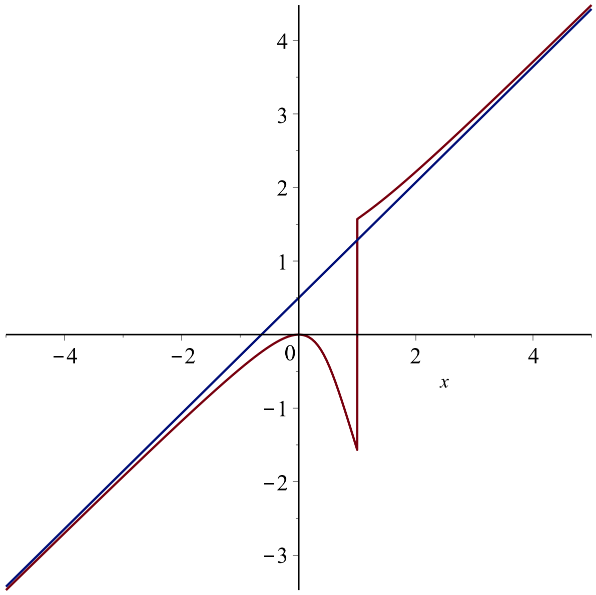
La fonction f admet un prolongement par continuité en 1 en posant $f(1) = 2$. ce rpolongement est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.
L'équation de la tangente en $A(1,2)$ est :
$y = 2 + (x-1) = x+1$. Au voisinage de 1 $f(x) - (2 + (x-1)) \sim -\dfrac{1}{3}(x-1)^2$. La courbe est donc située sous la tangente au voisinage du point A.



La courbe ci-dessus montre que la courbe est toujours sous la tangente, mais le développement limité ne donne une information qu'au voisinage du point.

Développement au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$ de $f(x) = x \arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.
On pose $X = \frac{1}{x}$, $\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{1-X}\right)$, fonction notée $g(X) = \arctan\left(\dfrac{1}{1-X}\right)$.

On a $g'(X) = \dfrac{1}{2-2X+X^2} = \dfrac{1}{2}(1+X+o(X)$.
Ce qui entraine $g(X) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + X + \dfrac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right)$.
On obtient finalement $f(x) = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4x} + o(\frac{1}{x})$. La courbe admet en $\pm\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2}$ et $f(x) - (\dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2}) \sim \dfrac{1}{4x}$. La courbe est donc située au dessus de son asmptote au voisinage de $+\infty$, en dessous au voisinage de $-\infty$.



3 Développements asymptotiques

Definition 6 *On considère une suite de fonctions* $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\phi_{n+1}(x) = o_{x_0}(\phi_n(x))$. *Cette suite est appelée échelle de comparaison.*
Un développement asymptotique, à l'ordre n *au voisinage de* x_0 *pour cette échelle de comparaison est :*
$f(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x) + o(a_n\phi_n(x))$.

Example 7 $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.
$\sin\sqrt{x} = \sqrt{x} - \dfrac{1}{6}x\sqrt{x} + \dfrac{1}{120}x^2\sqrt{x} + o(x^2\sqrt{x})$ *est un dévelopement asymptotique pour l'échelle de comparaison* $((\sqrt{x})^n)$.