EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1 Equations linéaires du premier ordre a(x)y'+b(x)y=c(x) (1)

où a,b,c sont des fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1 *On appelle solution de l'équation différentielle (1) sur un intervalle J toute application y de J dans $\mathbb{K}$ dérivable sur J telle que*

$$\forall x \in J \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

1.1 Equation homogène a(x)y'+b(x)y=0 (2)

Soit J un intervalle sur lequel a ne s'annule pas.

Théorème 1 *L'ensemble S_H des solutions de (2) sur J est un espace vectoriel .Soit F une primitive de $-\frac{b(t)}{a(t)}$*

$$y \in S_H \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in J \quad y(x) = C \exp F(x)$$

S_H est un espace vectoriel de dimension un.

Propriété 1 Soit $x_0 \in J$, l'application Φ de S_H dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(y) = y(x_0)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel , c'est à dire $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution y de (2) telle que $y(x_0) = y_0$

Exemple 1 1) $a \in \mathbb{R} \qquad y' = ay$
2) $(1 - x^2)y' - 2xy = 0$
3) $y' - y \tan x = 0$
4) $(x^2 - 1)y' + xy = 0$

1.2 Equation avec second membre a(x)y'+b(x)y=c(x) (1)

Soit J un intervalle sur lequel a ne s'annule pas.

Théorème 2 *Soit y_1 une solution de (1) sur J*

$$\begin{array}{lcl} y \ \ solution \ \ de\,(1) & \Longleftrightarrow & y - y_1 \ solution \ \ de \ (2) \\ y \ \ solution \ \ de\,(1) & \Longleftrightarrow & \exists y_0 \in S_H \qquad y = y_1 + y_0 \end{array}$$

Exemple 2 1) $(x^2 - 1)y' + xy = x^3 - x$ on cherchera une solution particulière polynôme
2) $y' \sin x - y \cos x = \sin x - x \cos x$

Méthode de variation de la constante:
Soit y_0 une solution non nulle de (2) , on cherche une solution particulière de (1) sous la forme $y(x) = C(x)y_0(x)$

$$y \ \ solution \ \ de \ (1) \Longleftrightarrow C'(x) = \frac{c(x)}{a(x)y_0(x)}$$

Exemple 3 1) $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$
2) $y' - y \tan x + \cos^2 x = 0$

2 Equations linaires du second ordre à coefficients constants ay"+by'+cy=f(x) (a,b,c,)$\in \mathbb{R}^3$ f(x)=e$^{mx}P(x)$ P polynôme

2.1 Equation homogène ay"+by'+cy=0 (2)

Théorème 3 *L'ensemble S_H des solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2 .*
L'équation $ar^2 + br + c = 0$ (3) est appelé équation caractéristique de (2) .
1) Si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes de (3) alors les applications y_1 et y_2 définies par $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$ foment une base de S_H
2) Si r est une racine double de (3) alors les applications y_1 et y_2 définies par $y_1(x) = e^{rx}$ et $y_2(x) = xe^{rx}$ foment une base de S_H
3) Si $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont deux racines complexes conjuguées non réelles de (3) alors les applications y_1 et y_2 définies par $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ foment une base de S_H

Propriété 2 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, l'application Φ de S_H dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(y) = (y(x_0), y(x_0))$ est un isomorphisme d'espace vectoriel , c'est à dire $\forall (y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution y de (2) telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$

Exemple 4 1) $y'' - k^2 y = 0$
2) $y'' + \omega^2 y = 0$
3) $y" + 2y' - 3y = 0$ avec $y(1) = 1 = y'(1)$
4) $y'' + 2y' + 5y = 0$ avec $y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$
5) $y'' + 4y' + 4y = 0$ avec $y(-1) = 1 \quad y'(-1) = 2$

2.2 Equation avec second membre ay"+by'+cy=f(x) (1)

Théorème 4 *Soit y_1 une solution de (1) sur $\mathbb{R}$*

$$\begin{array}{rcl} y \quad solution \ \ de\,(1) & \Longleftrightarrow & y - y_1 \ solution \ \ de \ (2) \\ y \quad solution \ \ de\,(1) & \Longleftrightarrow & \exists y_0 \in S_H \qquad y = y_1 + y_0 \end{array}$$

Théorème 5 *Si $f = f_1 + f_2$ on obtient une solution particulière de (1) en faisant la somme d'une solution particulière de $ay" + by\prime + cy = f_1(x)$ et d'une solution particulière de $ay" + by\prime + cy = f_2(x)$*

Si $f(x) = e^{mx} R(x)$ où R est un polynôme de degré n on cherche une solution particulière sous la forme $e^{mx} Q(x)$ où Q est un polynôme
de degré n si m n'est pas racine de l'équation $ar^2 + br + c = 0$
de degré $n+1$ si m est racine simple de l'équation $ar^2 + br + c = 0$
de degré $n+2$ si m est racine double de l'équation $ar^2 + br + c = 0$

Si $f(x) = R(x) \cos mx$ ou $f(x) = R(x) \sin mx$ où P est un polynôme de degré n on cherche une solution particulière sous la forme $Q(x) \cos mx + R(x) \sin mx$ où Q et R sont des polynômes.

Exemple 5 1) $y'' - 2y' + y = 2sh(x)$
2) $y'' + y' - 2y = x^2 + 2x - 1$
3) $y" + y\prime - 2y = x^2 e^x$
4) $y'' - 4y' + 4y = (x^2 - 1)e^{2x}$
5) $y'' + 4y = 6 \cos x$
6) $y'' + 4y = 16 \cos 2x$