LE CORPS DES NOMBRES REELS

1 Le corps des nombres reels :

Définition 1 *On appelle **loi interne** sur $\mathbb{R}$ toute application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 1 *L'addition et la multiplication sont des lois internes sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 1 *:*
1 + est associative
2 + est commutative
3 $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour + : 0
4 tout élément a de $\mathbb{R}$admet un opposé -a
*On dit que **($\mathbb{R}$,+) est un groupe commutatif .***
5 $\times$ est associative
6 $\times$ est commutative
7 $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour $\times$:1
8 tout élément a de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$admet un inverse $1/a$
*On dit que **($\mathbb{R}\setminus\{0\}$,$\times$) est un groupe commutatif.***

9 $\times$ est distributive par rapport à +
*Ces propriétés nous permettent de dire que **($\mathbb{R}$,+,$\times$) est un corps commutatif.***

La relation $\leq$ vérifie les propriétés suivantes :
10 $\leq$ est réflexive
11 $\leq$ est antisymétrique
12 $\leq$ est transitive
*Ces propriétés nous permettent de dire que $\leq$ **est une relation d'ordre***

13 $\leq$ est une relation d'ordre totale.
14 La relation d'ordre$\leq$ est compatible avec la structure de corps
*Ces propriétés nous permettent de dire que **($\mathbb{R}$,+,$\times$,$\leq$) est un corps commutatif totalement ordonné.***

2 Valeur absolue

Définition 2 *On appelle **valeur absolue** du réel x le réel noté $|x|$ défini par*

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ \ x \geq 0 \\ -x \ si \ \ x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 2
1.$\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = sup(x, -x)$
2.$\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3.$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$
4.$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x|\,|y|$
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\sup(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ $\quad \inf(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$

Proposition 3 *Si $|u| \leq k$ alors $1 - k \leq |1 + u| \leq 1 + k$*

Définition 3 *On appelle distance usuelle dans $\mathbb{R}$ l'application $d : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to |x - y| \in \mathbb{R}$ .Le réel $d(x, y) = |x - y|$ est appelé distance de x à y.*

Proposition 4
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = d(y, x)$
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire)*

3 Axiome de la borne supérieure et ses conséquences :

3.1 Axiome de la borne supérieure :

Définition 4 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, soit x un réel.*
On dit que

*x est un **majorant** (resp minorant) de A si*
*x est le **plus grand élément (**resp plus petit **)** de A si x est un majorant (respectivement minorant) de A et x est élément de A*

Axiome de la borne supérieure : ***Soit A une partie non vide majorée . L'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément .On l'appelle borne supérieure de A et on le note sup A .***
Axiome de la borne inférieure :
.

Proposition 5 $M = supA \iff \begin{cases} \forall a \in A \quad a \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad M - \varepsilon < a \end{cases}$

Proposition 6 ***Existence des racines n$^{\text{ème}}$*** *: soit un réel $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $b > 0$ tel que $b^n = a$, on l'appelle racine nième de a et on le note $a^{\frac{1}{n}} =^n \sqrt{a}$*

Proposition 7 *Pour tous réels x et y positifs on a $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$*

Remarque 1 $\mathbb{Q}$ *ne vérifie pas l'axiome de la borne supérieure.*

Remarque 2 $\mathbb{R}$ *est l'unique corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure.*

3.2 Conséquences :

Théorème 1 $\mathbb{R}$ ***est archimédien*** *c'est à dire* $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in]0, +\infty[\quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad a \leq nb$

Théorème 2 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! n \in \mathbb{Z} \quad n \leq x < n+1$. *n est appelé **partie entière de x** et est noté E(x) ou[x].*

Proposition 8 *Soit $a > 0$. Tout réel x s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = na + y$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq y < a$*

Proposition 9 ***Approximations décimales d'un réel.***
Soit a un réel . Soient
$$u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n} \quad et \quad v_n = \frac{E(10^n a)}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

*u_n est appelé **approximation décimale de a par défaut à** 10^{-n} **près** et v_n approximation décimale de a **par excès** à 10^{-n} près . On a*
$$u_n \leq a < v_n$$

4 Intervalles de $\mathbb{R}$:

Définition 5 *On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si* $\forall (x,y) \in I^2 \quad (x \leq y) \Longrightarrow [x,y] \subset I$

Définition 6 *On dit que I est une partie convexe de $\mathbb{R}$ si* $\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad tx + (1-t)y \in I$.

Proposition 10 *Les **parties convexes** de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.*

Définition 7 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle]a,b[non vide rencontre A*

Proposition 11 $\mathbb{Q}$ *et* $\overline{\mathbb{Q}}$ *sont denses dans* $\mathbb{R}$.

Définition 8 *Soit I un intervalle*
*On appelle **intérieur** de I l'intervalle de même extrémité que I obtenu en supprimant ses éventuelles extrémités et on note I*
*On appelle **adhérence** de I l'intervalle de même extrémité que I obtenu en rajoutant ses éventuelles extrémités et on note $\overline{I}$.*

Définition 9 *On adjoint à $\mathbb{R}$ deux éléments distinctes $-\infty$ et ∞ et on note* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.