Exercice 1

Soit A l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. A est un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel. On considère :

$$E = \{f \in A,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = ax + bx(\ln x)^2,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$F = \{g \in A,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \alpha + \beta \ln x + \gamma(\ln x)^2,\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\}.$$

On définit $f_1, f_2,\ g_1, g_2, g_3$ par :
$f_1(x) = x,\ f_2(x) = x(\ln x)^2,\ g_1(x) = 1,\ g_2(x) = \ln x,\ g_3(x) = (\ln x)^2,\ x \in \mathbb{R}+^*$.
1) Vérifier que E et F sont des sous-espaces vectoriels de A. Vérifier que $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2)$ est une base de E et que $\mathcal{B}_2 = (g_1, g_2, g_3)$ est une base de F.

2) Soit $f \in E$.
a) Montrer que f est dérivable et que $f' \in F$.
b) Montrer que $D : f \to f'$ est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Déterminer $\ker D$ et $\operatorname{im} D$.

3) Soit $k : x \to x(1 - (\ln x)^2),\ x > 0$. Vérifier que $k \in E$ et donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}_1$. Déterminer la fonction dérivée de k.

Exercice 2

Soit E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$(u - 5\,Id_E) \circ (u - 3\,Id_E) = \theta_E = 0.$$

1) On définit :

$$p = -\frac{1}{2}\,(u - 5\,Id_E),\ q = \frac{1}{2}\,(u - 3\,Id_E).$$

Montrer que p et q sont des projections de E.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer u en fonction de p et q puis u^n en fonction de puissances de p et de q.
3) Exprimer u^{-1} puis $u^n,\ n \in \mathbb{Z}$ en fonction de p et de q.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^4$.
1) Montrer que

$$F = \{(x,y,z,t) \in E | x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$$

est un sous espace vectoriel de E.
2) Déterminer une base de F. quelle est sa dimension ?
3) Déterminer une base d'un supplémentaire G de F. Que peut on dire de la réunion d'une base de F et d'une base de G ?