Exercice 1

1) Montrer qu'il existe un polynôme T_n (appelé polynôme de Tchebychev d'ordre n) à coefficients entiers tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

On montrera que

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}(1-X^2)^k.$$

2) Expliciter les polynômes T_0, T_1, T_2, et T_3.
3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Rappel : $\cos(p) + \cos(q) = 2\ \cos(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2})$.
4) En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme T_n.
5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $a_k = \cos\left((\dfrac{n-k}{n})\pi\right)$, $k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$, on remarquera que $-1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$.
On définit pour $k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$:

$$L_k(X) = \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}.$$

famille de $n+1$ polynômes de Lagrange de degré n.
a) Calculer $L_k(a_k)$ et $L_k(a_j)$ pour $0 \leq k \leq n,\ 0 \leq j \leq n,\ j \neq k$.
b) Montrer que $(L_0,\ L_1,\ \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
c) Déterminer les coordonnées dans cette base de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ en fonction des $P(a_k),\ 0 \leq k \leq n$.
d) Calculer $T_n(a_k),\ 0 \leq k \leq n$. En déduire les coordonnées de T_n dans la base précédente.

Exercice 2

On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}$.
1) Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2) Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$ pour tout réel x appartenant à I.
La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.
3) Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
4)a) Montrer que f vérifie l'équation différentielle (E), $(1-x)^2 y' = (2-x)y$ sur I.
b) En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right]P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X)$$