DEVOIR 1

Exercice 1

1) Soit l'équation

$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0 \ (1)$$

à coefficients a, b, c réels et d'inconnue X complexe.
On pose $X = x + \alpha,\ x \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{C}$. Quelle valeur faut il donner à α pour que l'équation en x qu'on obtient n'ait pas de terme en x^2 ?
On se ramène donc à l'équation $x^3 + px + q = 0$ (2). Montrer que p et q sont réels.
2) Pour résoudre l'équation (2) on pose $x = u + v$ avec $uv = -\frac{p}{3}$. Montrer que (2) conduit à la résolution du système

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q && (1)\\ u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} && (2)\\ uv &\in \mathbb{R} && (3) \end{aligned}$$

En déduire que u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du second degré dont on calculera le discriminant. Soit δ une racine carrée de ce discriminant. Exprimer u^3 et v^3 en fonction de q et δ.
3) Appliquer cette méthode aux équations suivantes

$$\begin{aligned} X^3 + 3X^2 + 15X + 76 &= 0 && (4)\\ X^3 - 12X - 8\sqrt{2} &= 0 && (5) \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit I l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. On note également I l'application correspondante du plan complexe, appelée inversion.
1) Vérifier que I est une involution du plan $\mathcal{P}$ privé du point O dans lui-même.
2) Déterminer l'image par I :
- d'une droite passant par O, privée de O.
- d'une droite ne passant pas par O.
- d'un cercle passant par O privé de O.
- d'un cercle ne passant pas par O.

3) Soient M' et N' les images respectives des points M et N éléments de $\mathcal{P} - \{O\}$. Montrer que

$$M'N' = \frac{MN}{OM.ON}$$

On pourra choisir un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tel que $\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{e_1},\ a > 0$.