# DM

**Les parties I, II sont, dans une large mesure, indépendantes.**

Soit $n$ un entier naturel non nul.

I-

1) On pose : $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
2) Montrer que l'on peut écrire $A = X \times B$ où $B$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté $b_0$.
3) Déterminer les racines de $A$ dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

4) Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.
En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
5) Calculer de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis, en déduire $Q_n$ et enfin, $P_n$.

II-

On considÃ¨re un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ supposé non réduit au vecteur nul. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $E$, $I_E$ est l'application identité de $E$ et $\theta$ désigne l'application nulle.

Par convention : $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ f^0 = I_E$.

On étudie sur quelques cas particuliers, l'équation : $(f + I_E)^{2n} - I_E = \theta$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'inconnue.

6) Déterminer les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.
7) En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ déterminer les sommes $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $S' = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.
(la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.)
8) Si $s$ est une symétrie de $E$, exprimer $(s + I_E)^{2n} - I_E$ en fonction de $s$ et $I_E$.
En déduire les symétries de $E$ solutions de l'équation proposée.