

DM

Soit n un entier naturel non nul.

On pose : $A = (X + 1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

- 1) Montrer que l'on peut écrire $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0 .
- 2) Déterminer les racines de A dans \mathbb{C} . On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

- 3) Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$. On utilisera $\sin(\pi - x) = \sin x$.
En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
- 4) Calculer de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis, en déduire Q_n et enfin, P_n .