DM

On considère la suite (a_k) d'éléments de $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie par :

$$a_0 = 1,\ \forall n \geq 2,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{(n-k)!} X^{n-k} \in K[X]$.

1) Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4. Expliciter les polynômes A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.

2) Montrer que la suite (A_n) est l'unique suite de polynômes vérifiant :

- $P_0 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ P'_{n+1} = P_n$.
- $\forall n \geq 2,\ P_n(0) = P_n(1)$.

3) En utilisant la question précédente, montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n(1-X) = (-1)^n A_n(X)$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n(X+1) - A_n(X) = \dfrac{1}{(n-1)!} X^{n-1}$.

4) On considère $n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}^*$, un entier impair.

a) Montrer que le polynôme A_{2p+1} est divisible par $X(X-1)(2X-1)$.

b) En déduire que $a_{2p+1} = 0$.

c) Ecrire explicitement les polynômes A_5, A_6 et A_7.

5)

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2},\ \text{on pose } S_n(m) = \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

a) Exprimer $S_n(m)$ au moyen de m, $A_{n+1}(m)$ et a_{n+1}.

b) Donner l'expression générale de $S_n(m),\ n \in \{1,2,3\}$ en factorisant en tant que polynôme en m dans chacun des trois cas.