DM

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2,\, 1,\, -2)$.

1) a) Montrer que $\ker(f) = \mathrm{vect}(u)$.
b) La matrice A est-elle inversible ?

2) a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et tel que $f(v) = u$.
b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et qui vérifie $f(w) = v$ est le vecteur $w = (0,\, 1,\, -1)$.
c) Vérifier que $\mathcal{B}' = (u,\, v,\, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3) a) Déterminer la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}'$ sans utiliser la matrice P.
b) Déterminer la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1} puis en déduire que pour tout $k \geq 3$ on a $A^k = O$.

4) On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices qui commutent avec N (respectivement avec A).
a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \mathrm{vect}(I,\, N,\, N^2)$.
On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
b) montrer que $M \in C_A \iff P^{-1}\, M\, P \in C_N$.
En déduire que $C_A = \mathrm{vect}(I,\, A,\, A^2)$.

Exercice 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

On appelle f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
1) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{im} f$. Donner la dimension de $\mathrm{im} f$.
2) Déterminer une équation simple de $\mathrm{im} f$. Les sous-espaces $\ker f$ et $\mathrm{im} f$ sont ils supplémentaires ?
3) Déterminer f^4, en utilisant ou non la matrice A, puis en déduire A^p, $p \in \mathbb{N}^*$.
4) Calculer $(I_4 - A)^{-1}$ en utilisant la question précédente.