DM

On rappelle que si $p \in \mathbb{N}^*$, la notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

Partie A

Soit $p \in \mathbb{N}^*$,. Une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice 3** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Dans cette partie on note $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice 3. On note I la matrice I_p, matrice unité d'ordre p. Pour tout $t \in R$, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

1) Vérifier la relation

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s)\,E(t) = E(s+t).$$

2) En déduire que $(E(t))^n = E(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4) Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
5) En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est injective.
6) Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$.

Partie B

Dans cette partie on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.
1) a) Déterminer les réels λ_1 et λ_2 tels que $f - \lambda_i Id_{\mathbb{R}^2},\ i = 1, 2$ ne soit pas bijectif.
b) Montrer que $F = \ker(f - \lambda_1 Id_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(f - \lambda_2 Id_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Donner un vecteur directeur u de F et un vecteur directeur v de G.
2) Déterminer, sans calculs, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$ de $\mathbb{R}^2$.
3) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ vers la base $\mathcal{B} = (u, v)$ ainsi que la matrice P^{-1}.
4) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.