DEVOIR 2

Exercice 1

Soient $\mathcal{D}_1$ la droites d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x+3y-z & = & 1 \end{array}\right.$$

et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,1,0)$. Déterminer la perpendiculaire commune à ces deux droites et la distance entre ces deux droites.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un tétraèdre.
1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$.
En déduire que $(AB)\perp(CD)$ et $(AC)\perp(BD)\Longrightarrow(AD)\perp(BC)$.
2) On appelle A',B',C',D' les projections orthogonales des points A,B,C,D sur les plans $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ respectivement. B_1 est le pied de la hauteur issue de B dans BCD. On dit que le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique si ses arêtes opposées sont deux à deux orthogonales.
a) Montrer que $(ABCD)$ orthocentrique entraine A' orthocentre de BCD.
b) Montrer que $(ABCD)$ orthocentrique entraine $AB'B_1$ et $BA'B_1$ alignés. En déduire que (AA') et (BB') sont coplanaires. On pose
$\{H\}=(AA')\cap(BB')$.
c) Montrer que $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD}=0$, $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AD}=0$ en déduire que $H\in(CC')$.
d) Montrer que $H\in(DD')$.