DEVOIR 3

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 et vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)}\ (*).$$

1) Montrer que les seules valeurs possibles pour $f(0)$ sont -1, 0 ou 1. En calculant $f(2x)-1$ et $f(2x)+1$, montrer que $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \in [-1,1]$.
2) Montrer que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(\frac{x_0}{2^n}) = 1$, en déduire que dans ce cas $f(0) = 1$. Montrer de même que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = -1$ alors $f(0) = -1$.
3) On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que dans ce cas $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in]-1,1[$. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = \text{argth}\ f(x)$, montrer que l'équation fonctionnelle $(*)$ entraine alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(2x) = 2\phi(x)$ puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}}.$$

En déduire, en utilisant la définition du nombre dérivé en un point, que $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = \alpha x$ où α est une constante que l'on précisera (en fonction de ϕ). En déduire f puis vérifier que la fonction déterminée est bien solution de l'équation fonctionnelle.

Exercice 2

1) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \arctan t - t + \frac{t^3}{3}.$$

a) Vérifier que g est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leq g'(t) \leq t^2$.
c) En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t - \frac{t^3}{3} \leq \arctan t \leq t$.
2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défine par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall t \neq 0,\ f(t) = \frac{\arctan t}{t}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, paire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable en 0. Calculer $f'(t)$, $t \neq 0$ et $f'(0)$.
3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -\frac{1}{2} t^2 f'(t).$$

En déduire le sens de variation de f puis tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.