DM

ENSAIS 2003

.

Soient $(a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3$.
On se propose d'étudier les suites réelles définies comme suit :

$$u_0 = \lambda,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+1} = 3u_n^2 - 2(a+b)u_n + ab + 2(a+b).$$

1) On suppose dans cette question que $a = b = 0$.
a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0$.
b) On suppose $\lambda \neq 0$ et l'on définit la suite (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \ln(u_n) + \ln(3/4).$$

Calculer w_1 en fonction de λ. Exprimer w_n en fonction de n et de w_1.
c) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de n et de λ. Etudier la convergence de la suite (u_n) en fonction des valeurs de λ.
2) Dans cette partie on suppose que $a = b = 2$.
a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
On suppose la suite (u_n) convergente, déterminer quelle serait sa limite.
c) On suppose $\lambda > 2$. Montrer que la suite (u_n) est divergente.
d) Montrer qu'il existe deux valeurs λ_1 et λ_2, $\lambda_1 < \lambda_2$ telles que si $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ on a $u_1 = 2$.
e) On suppose $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Montrer que la suite (u_n) converge.
f) On suppose $\lambda < \lambda_1$. Montrer que la suite (u_n) est divergente.
3) Dans cette partie on suppose que $a < b < 2$.
a) On considère l'pplication polynôme définie comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 3x^2 - 2(2+a+b)x + ab + 2(a+b).$$

Soit Q la primitive de P qui s'annule pour $x = 2$. Déterminer Q. Montrer que Q admet trois racines réelles deux à deux distinctes.
b) On suppose que la suite (u_n) converge vers la limite L. Montrer que L vérifie l'une des deux inégalités suivantes :

$$a < L < b \text{ ou } b < L < 2.$$