DM

Ecricome 2003

On considère la suite de nombre réels définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = a \in \mathbb{R}_+^*,\ u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

Partie I
1) Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2) Montrer que cette suite tend vers l'infini.

Partie II
On définit la suite (v_n) par : $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln u_n$.
1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n})$.
En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_n}).$$

2) En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n

$$(*)\ 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln(1 + \frac{1}{u_n}).$$

3) Montrer que la suite (v_n) est majorée puis qu'elle converge vers une limite α.
4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$.
En passant à la limite pour n fixé dans $(*)$ montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1.$$

En déduire lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant : $u_n \sim \exp(\alpha 2^n)$.
5) On pose $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$.
Montrer que la suite (β_n) est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n).$$

6) Montrer que lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1).$$

Remarque : $a_n = o(1) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.