

DM

Exercice 1

A - Étude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ sinon

A - 1) Quel est l'ensemble de définition D de f .

A - 2) f est-elle dérivable en 0 ?

A - 3) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; 1[$.

A - 4) Dresser le tableau de variations de f . On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

B - Étude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$

B - 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.

B - 2) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

B - 3) Montrer que $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

B - 4) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

B - 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

B - 6) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Exercice 2