Dans tout ce problème, a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

Première partie

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X];\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)\}$.

1) Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

Montrer l'unicité de P
On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2) Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3) Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4) Déterminer $\operatorname{Ker}\theta$ (noyau de θ).

5) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

a) Quel est le degré de Q_k ?

b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6)a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \dots, p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im}\theta$.

b) Que peut-on en conclure ?

7) Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

8) Pour $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $\;x_n^{(k)} = n^k$.
On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $\;y_n = a^n$.
Montrer que $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

9) *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 2n + 7 \\ u_0 &= -2 \end{aligned}$$

Deuxième partie

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

1) En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X];\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + P(n)\right\}$$

2) *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} &= u_n - 6n + 1 && (1) \\ u_0 &= -2 && (2) \end{aligned}$$