DM

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$(f + 3Id_E) \circ (f - 2Id_E) = 0,\ f \neq -3Id_E,\ f \neq 2Id_E,\ (*).$$

1) a) Soit $A = \{af + bId_E, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$. Vérifier que (f, Id_E) est une base de A.
b) Montrer que $f \in GL(E)$ et que $f^{-1} \in A$.
c) Quels sont les éléments inversibles de A ?
d) Soient $g = f - 2Id_E,\ h = f + 3Id_E$. Montrer que (g, h) est une base de A. Quelles sont les coordonnées de Id_E et de f dans cette base ?
2) a)Montrer que :

$$\operatorname{im} g \subset \ker h,\ \operatorname{im} h \subset \ker g,\ \operatorname{im} g + \operatorname{im} h = E$$

b) Montrer que $\ker g$ et $\ker h$ sont supplémentaires et que $\operatorname{im} g = \ker h,\ \operatorname{im} h = \ker g$.
3) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ contenant les suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n.$$

Soit

$$f : E \to E,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (v_n)_{n\in\mathbb{N}},\ v_n = u_{n+1}$$

.
Montrer que f vérifie les conditions $(*)$. Déterminer dans ce cas $\ker g,\ \ker h$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) Dans cette question on revient au cas général.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n \in A$. On appelle t_n et s_n les coordonnées de f^n dans la base (f, Id_E) de A, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer t_{n+2} en fonction de t_{n+1} et t_n. et s_{n+2} en fonction de s_{n+1} et s_n.
b) En déduire $t_n$et s_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$, puis f^n en fonction de $Id_E,\ f,$ et n.

Exercice 2

1) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^2+1} dx.$$

2) En utilisant l'égalité $x^4 = (x^2-1)(x^2+1) + 1$, calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{x^4 \arctan x}{x^2+1} dx$$

en remarquant que $x^3 - 3x = x(x^2+1) - 4x$.