F est l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Questions préliminaires : Soit ψ l'application, définie sur F, qui, à une fonction f, associe sa dérivée f' :

a) Montrer que ψ est un endomorphisme de F.

b) Est-ce un automorphisme ?

On considère le sous-ensemble E de F des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x$$

où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ (c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à 1 et à coefficients réels, $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ P(x) = ax+b,\ Q(x) = cx+d$).

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F, de base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où
$f_1 : x \mapsto \sin x\,;\quad f_2 : x \mapsto x\sin x\,;\quad f_3 : x \mapsto \cos x\,;\quad f_4 : x \mapsto x\cos x.$

2) D est la restriction de ψ à E.

a) Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer $D(f_1)$, $D(f_2)$, $D(f_3)$, $D(f_4)$.
Soit $f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ un élément de E de coordonnées respectives a, b, c, d dans la base $\mathcal{B}$. On pose $D(f) = Af_1 + Bf_2 + Cf_3 + Df_4$, Déterminer A, B, C, D en fonction de a, b, c, d.

b) Déterminer $\ker(D)$. En déduire que D est une bijection de E sur E.

3) λ est un réel, Id_E est l'application identique de E.

a) Déterminer, selon les valeurs de λ, le rang de $u_\lambda = D^2 - \lambda \mathrm{Id}_E$ aprés avoir vérifié les égalités suivantes :
$u_\lambda(f_1) = (-1-\lambda)f_1,\ u_\lambda(f_2) = (-1-\lambda)f_2 + 2f_3,\ u_\lambda(f_3) = (-1-\lambda)f_3,\ u_\lambda(f_4) = -2f_1 + (-1-\lambda)f_4.$
On distinguera les cas $\lambda \neq -1$ et $\lambda = -1$.

b) Montrer que $\ker(D^2 + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{im}\ (D^2 + \mathrm{Id}_E)$.En déduire une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + \mathrm{Id}_E$.

c) En déduire que $D^4 + 2D^2 + \mathrm{Id}_E$ est l'application nulle de E.

d) Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.

4) On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

a) Vérifier que V est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, c'est à dire un sous espace vectoriel et un sous anneau de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit G l'ensemble des éléments inversibles de V.

Montrer que G est l'ensemble des éléments de la forme : $\alpha \mathrm{Id}_E + \beta D^2$ où $\alpha \neq \beta$.

Rappel : $\alpha \mathrm{Id}_E + \beta D^2$ est inversible dans V si et seulement si il existe $\alpha' \mathrm{Id}_E + \beta' D^2 \in V$ tel que
$(\alpha \mathrm{Id}_E + \beta D^2) \circ (\alpha' \mathrm{Id}_E + \beta' D^2) = Id_E$.

c) G constitue-t-il un groupe pour la loi de composition des applications ?

5) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

b) Déterminer le noyau de $\psi^2 + \mathrm{Id}_F$.

c) Montrer que le noyau de $(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)^2$ est E. Puis montrer que E est exactement l'espace des solutions de l'équation différentielle :

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$