MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES 2002
EPREUVE SPECIFIQUE DE MATHEMATIQUES

Problème: Calcul et irrationalité de $\zeta(2) = \lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\Big)$

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction f avec : $f^{(0)} = f$.
Remarque : sauf s'il est précisé entier naturel, un entier peut être positif ou négatif.

Partie A : Convergence de la suite $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^p}\Big)_{n\geq 1}$

Dans cette partie, p et n sont deux entiers naturels non nuls et on pose $S_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^p}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\quad \dfrac{1}{(k+1)^p} \leq \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x^p}\,dx \leq \frac{1}{k^p}$.
Remarque: $x \in [k,\, k+1]$ pour cette question.

2. En déduire que pour $n \geq 2$, $\quad S_n(p) - 1 \leq I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \leq S_{n-1}(p)$.

3. Démontrer, par un calcul d'intégrales que la suite (I_n) a une limite finie si et seulement si $p \geq 2$. On montrera que (I_n) a une limite finie quand $p \geq 2$ et infinie pour $p = 1$.

4. Montrer que la suite $\big(S_n(p)\big)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si $p \geq 2$.

On note alors $\zeta(p) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(p)$.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$**.**

Dans cette partie on pose, pour tout t réel : $h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$, et on définit la fonction φ sur $[0,\pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{pour } t \in]0,\pi].$$

5. Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.. On vérifiera que: $\varphi(t) = -1+\frac{1}{2\pi}\,t+o(t)$ et que $\varphi'(t) = \frac{1}{2\pi} + \epsilon(t)$, $\lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0$ aprés avoir calculé explicitement $\varphi'(t)$.

6. Calculer, pour tout k entier naturel non nul, $\displaystyle\int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\,dt$.

7. Calculer, pour $t \in]0,\pi]$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt$, puis déterminer une constante λ telle que,

$$\forall t \in]0,\pi], \qquad \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\frac{t}{2}} - \lambda.$$

8. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que, pour toute fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi}\psi(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt = 0$.

9. Montrer que $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}.}$

Partie C : $\zeta(2)$ est irrationnel.

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

10. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

a. Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ tels que $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{i=n}^{2n} e_i x^i$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel k, $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers.
(On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$ et en déduire une relation entre $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ pour un entier naturel k quelconque).

On veut montrer que π^2 est irrationnel, et on va **raisonner par l'absurde** : on suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

11. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$F_n(x) = b^n(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)).$$

a. Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)$, et $A_n = \pi \displaystyle\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,dx$.
Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$, et montrer que A_n est un entier.

12. On pose, toujours pour le même entier a, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

a. En considérant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{2}$.

c. Montrer que, pour tout réel $x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n!}$.

d. Montrer alors que, pour tout entier $n \geq n_0$, $A_n \in]0,1[$, et conclure que π^2 est irrationnel.

e) Comment peut-on en déduire que π est irrationnel?

Pour information

Il a été prouvé depuis le $18^{\text{ème}}$ siècle que $\zeta(p)$ est irrationnel pour tout entier pair $p \geq 2$; récemment (1979) il vient d'être découvert que $\zeta(3)$ est irrationnel et le mystère demeure encore quant à l'irrationalité des $\zeta(p)$ pour les entiers impairs $p \geq 3$ ...