Exercice 1

Soient

$$a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \dfrac{1}{a} & 0 & a \\ \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Vérifier que $M^2 = M + 2I_3$.
2) Montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2,\ M^k = a_k M + b_k I_3$$

On ne demande pas, dans cette question, de déterminer a_k et b_k.
3) Déterminer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k, en déduire une relation entre $a_{k+2},\ a_{k+1},\ a_k$. En remarquant que (a_k) est une suite récurrente linéaire double, déterminer a_k et b_k en fonction de k et de a_0 et b_0 que l'on explicitera.
4) En utilisant la première question, montrer que M est inversible et calculer M^{-1} en fonction de M et I_3.

Problème. Mines MPSI 2007. Problème II

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_2[X]$ le sous espace vectoriel des polyômes de degré inférieur ou égal à deux. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B} = (1,\ X,\ X^2)$.

I. Changement de base et division euclidienne

1) Etant donné trois réels deux à deux distincts $a_1,\ a_2,\ a_3$ on considère trois polynômes $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^3,\ Q_i(a_j) = 0$ si $i \neq j,\ Q_i(a_i) \neq 0$. Montrer que $Q_1,\ Q_2$ et Q_3 sont linéairement indépendants.

2) On pose

$$\begin{cases} P_1(X) &= \dfrac{1}{8}(X-3)(X-5) \\ P_2(X) &= \dfrac{-1}{4}(X-1)(X-5) \\ P_3(X) &= \dfrac{1}{8}(X-1)(X-3) \end{cases}$$

Calculer $P_i(1),\ P_i(3)$ et $P_i(5)$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

3) En déduire que $\mathcal{P} = (P_1,\ P_2,\ P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4) Déterminer la matrice A de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{P}$.

5) Justifier que A est inversible et calculer son inverse.

6) On pose $P_0(X) = (X-1)(X-3)(X-5)$. Pour tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ on note $\hat{P}(X)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0 et par f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = \hat{P}$. Montrer que f est linéaire.

7) Déterminer l'image de f.

8) Déterminer le noyau de f.

9) Comparer f^2 et f, reconnaître f et en donner les éléments caractéristiques.

10) Montrer que $\hat{P}(X) = P(1)P_1(X) + P(3)P_2(X) + P(5)P_3(X)$.

11) Retrouver ainsi la matrice inverse de A.

II. Calcul matriciel

On pose

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12) Calculer le produit $(M - I)(M - 3I)(M - 5I)$ ainsi que chacun des produits se déduisant par permutation des trois facteurs.

13) On note E l'ensemble des matrices de la forme $aI + bM + cM^2$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels.

14) Déterminer la dimension de E.

15) Pour tout polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$ on pose $P(M) = aI + bM + cM^2$ et on note Φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E définie par $\Phi[P(X)] = P(M)$.
Montrer que Φ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

16) On pose $B_i = P_i(M)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. En utilisant la question 10 et le résultat précédent, exprimer I, M et M^2 sous forme de combinaison linéaire de B_1 B_2 et B_3.

17) Déduire de la question 12 la valeurs des produits B_iB_j por $i \neq j$.