Problème 1

Dans tout le problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, on note E_n le sous-espace de E formé par les polynômes de degré au plus égal à n.
Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
L'espace E_n est muni de sa base canonique $\mathscr{B}_n = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$.
Les coefficients binomiaux sont notés $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Partie A : Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme P de E, on définit un polynôme $\phi(P)$ par :

$$[\phi(P)]\,(X) = \left(X^2 - 1\right) P''(X) + 2XP'(X).$$

1) Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme ϕ de E.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel E_n est stable par ϕ.

On notera désormais φ_n l'endomorphisme de E_n induit par ϕ sur E_n :

$$\forall P \in E_n, \varphi_n(P) = \phi(P)$$

3) Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.

a) Écrire la matrice M_3 de φ_3 dans la base canonique de E_3.

b) Déterminer les réels λ tel que $\varphi_3 - \lambda Id_{E_3}$ ne soit pas injective.

c) Déterminer une base de E_3 dans laquelle la matrice D_3 de φ_3 soit diagonale, en choisissant des polynômes de coefficients dominants égaux à 1. Quelle est la relation existant entre D_3 et M_3 ?

4) On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque. Montrer que la matrice M_n de φ_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et préciser ses coefficients diagonaux.

Partie B : Étude d'une famille de polynômes

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1) Calculer sous forme simplifiée les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.

2) Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer le degré de L_n en fonction de n $(n \in \mathbb{N})$ et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.

4) En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n a la même parité que n.

5) Vérifier, à l'aide de la formule de Leibniz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, X^n} \left[\left(X^2 - 1\right)^n\right].$$

6) En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n(x)| \leqslant \left(\frac{1 + |x|}{2}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

8) On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n(X) = \left(X^2 - 1\right)^n$.

a) Vérifier que :
$$\left(X^2 - 1\right) U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$

b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(L_n) = n(n+1)L_n.$$

Partie C : Définition d'un produit scalaire

On pose
$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x) \ \mathrm{d}\, x.$$

1) Justifier que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite du problème, l'espace E et ses sous-espaces E_n ($n \in \mathbb{N}$) seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

2) Montrer que
$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle \phi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P'(x)Q'(x) \ \mathrm{d}\, x.$$

3) Soit n un entier naturel.

a) Établir par récurrence sur k que
$$\forall k \in [|0,n|], \langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\, x^k}\left[Q(x)\right] \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}\, x^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right] \ \mathrm{d}\, x.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1}.

c) En déduire que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

4) a) À l'aide de **C.3)a)**, exprimer, pour tout entier naturel n, $\|L_n\|^2$ en fonction de
$$I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \ \mathrm{d}\, x.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

d) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

5) Donner, pour tout entier naturel n, une base orthonormée de E_n.

Problème 2 : Algèbre Mines sup 2002 partiel

Dans ce problème E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension trois muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. La norme de E est note $||\,.\,||$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E, Id_E l'application identité de E et 0 le vecteur nul de E.

1) Soit $\psi \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1.1 Montrer que $\dfrac{4}{3}\psi$ est un demi tour (ou retournement) dont on précisera l'axe D.

1.2 En déduire que ψ est la compose de deux endomorphismes simples de E que l'on précisera.

2) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes ϕ de E tels que :

$$\exists k \in [0,1[,\ \forall x \in E,\ ||\phi(x)|| \leqslant k||x||.$$

2.1 Monter que $\psi \in \mathcal{S} \cap GL(E)$.

2.2 Id_E appartient il à $\mathcal{S}$?

2.3 Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour $\circ$. $\mathcal{S} \cap GL(E)$ est il un sous groupe de $(GL(E), \circ)$?

2.4 Soit $\phi \in \mathcal{S}$. Montrer que $\ker(\phi - Id_E) = \{0\}$. En déduire que $(\phi - Id_E) \in GL(E)$.

2.5 Montrer que $\phi \in \mathcal{S}$ si et seulement si : $\exists k \in [0,1[,\ \forall x \in E,\ (||x|| = 1 \Rightarrow ||\phi(x)|| \leqslant k)$.

2.6 Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale, à éléments diagonaux strictement inférieurs 1 en valeurs absolue. Montrer que $\phi \in \mathcal{S}$.

3) Soit $\mu \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

3.1 On définit $e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et $e_3' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base orthonormée de E.

3.2 Déterminer la matrice de μ dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire que $\mu \in \mathcal{S}$.