DEVOIR SURVEILLE 10

Problème 1 : Algèbre Mines sup 2003

On considère les quatre matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

I- Etude d'une symétrie.

Dans cette partie, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est munie de sa structure de $\mathbb{C}$-algèbre, c'est à dire de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et d'anneau. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\tau(A) = a + d$.

1)a) Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Etablir que (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.

2) Soient A et B éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$.

b) Vérifier l'égalité $A\sigma(A) = \det(A)\, I$.

c) Montrer que si A est inversible, alos $\sigma(A)$ l'est aussi. Exprimer les matrices $(\sigma(A))^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A.

3)a) Vérifier que τ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Exprimer $\sigma(A)$ à l'aide des matrices A, I et du nombre complexe $\tau(A)$.

II- Une $\mathbb{R}$-algèbre célèbre, l'algèbre des quaternions.

Dans cette partie, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est munie de sa structure de $\mathbb{R}$-algèbre, c'est à dire de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et d'anneau. A tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, on associe la matrice $M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$.

On définit l'ensemble des matrices $H = \{M(z_1, z_2) | (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\}$.

4)a) Montrer que toute matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ d'une combinaison linéaire à coefficients <u>réels</u> de ces quatre matrices I, J, K, L.

b) En déduire que H est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Préciser une base et la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel H.

c) Montrer que H est stable pour le produit matriciel.

d) Montrer que H a une structure d'anneau. Cet anneau est il commutatif ?

5)a) Vérifier que : $\forall A \in H,\ \sigma(A) \in H$ et $\det(A) \in \mathbb{R}_+$.

b) Montrer qu'une matrice non nulle de H est inversible et que son inverse est dans H.

c) Vérifier que $(H^*, .)$ est un groupe où $H^* = H - \{0\}$ et . est la multiplication des matrices.

6) Montrer que si deux entiers naturels peuvent s'écrire tous les deux comme somme de quatre carrés d'entiers naturels, il en est de même de leur produit :

si $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,\ x' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2,\ (a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4,\ (a', b', c', d') \in \mathbb{N}^4$ alors

$x\,x' = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,\ (A, B, C, D) \in \mathbb{N}^4$.

On pourra exprimer $\det(M(z_1, z_2))$ comme une somme de quatre carrés de réels.

III- Un produit scalaire et une projection orthogonale.

Pour $(A, B) \in H^2$, on pose : $(A|B) = \dfrac{1}{4}\tau\left(A\sigma(B) + B\sigma(A)\right)$.

1)a) Montrer que $(A|B) \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser la question 5)a).

b) Montrer que $(A|A) = \det(A)$.

c) Etablir que $(.|.)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel$H$.

8) Vérifier que (I, J, K, L) est une base orthonormée de H.
9) On définit $F = \ker(\tau) = \{A \in H | \tau(A) = 0\}$.
a) Montrer que F est un hyperplan de H et en donner une base.
b) Montrer que $F^\perp = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{R}\}$.
On désigne par π la projection orthogonale sur F.
Montrer que : $\forall A \in H,\ \pi(A) = \dfrac{1}{2}(A - \sigma(A))$.

Problème 2 : Algèbre Mines sup 2002

Dans ce problème E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension trois muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. La norme de E est note $||\,.\,||$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E, Id_E l'application identité de E et 0 le vecteur nul de E.

1) Soit $\psi \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1.1 Montrer que $\dfrac{4}{3}\psi$ est un demi tour (ou retournement) dont on précisera l'axe D.

1.2 En déduire que ψ est la compose de deux endomorphismes simples de E que l'on prcisera.

2) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes ϕ de E tels que :

$$\exists k \in [0, 1[,\ \forall x \in E,\ ||\phi(x)|| \leq k||x||.$$

2.1 Monter que $\psi \in \mathcal{S} \cap GL(E)$.

2.2 Id_E appartient il à $\mathcal{S}$?

2.3 Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour $\circ$. $\mathcal{S} \cap GL(E)$ est il un sous groupe de $(GL(E), \circ)$?

2.4 Soit $\phi \in \mathcal{S}$. Montrer que $\ker(\phi - Id_E) = \{0\}$. En déduire que $(\phi - Id_E) \in GL(E)$.

2.5 Montrer que $\phi \in \mathcal{S}$ si et seulement si : $\exists k \in [0, 1[,\ \forall x \in E,\ (||x|| = 1 \Rightarrow ||\phi(x)|| \leq k)$.

2.6 Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale, à éléments diagonaux strictement inférieurs 1 en valeurs absolue. Montrer que $\phi \in \mathcal{S}$.

3) Soit $\mu \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

3.1 On définit $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et $e'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormée de E.

3.2 Déterminer la matrice de μ dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire que $\mu \in \mathcal{S}$.

4) Soit $\phi_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M_\alpha = \alpha\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On se propose de montrer que $\phi_\alpha \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow |\alpha| < \dfrac{1}{2}$.
Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur de E de norme 1.

4.1 Montrer que : $||\phi_\alpha(x)||^2 = \alpha^2\,(1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2)$.

4.2 Le vecteur x s'écrit dans la base $\mathcal{B}'$, $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$.

Montrer que $||\phi_\alpha(x)||^2 = \alpha^2\,(1 + 3x_1'^2)$. En déduire que $||\phi_\alpha(x)|| \leq 2\alpha$.

Déterminer l'ensemble des vecteurs x de E de norme 1 pour lesquels cette ingalité est une égalité.

4.3 Montrer que $\phi_\alpha \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow |\alpha| < \dfrac{1}{2}$.