DEVOIR SURVEILLE 2

Exercice 1

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal direct.
On considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ définies par les équations cartésiennes :

$$\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x-3y-2z+4 & = & 0 \\ 4x+y-z-3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z-1 & = & 0 \\ x-y+z-3 & = & 0 \end{array} \right.$$

1) Déterminer des équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ étant des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$ respectivement, vérifier que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{w}(1,4,1)$.
3) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ contenant $\mathcal{D}_1$ et dont $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur. et une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ contenant $\mathcal{D}_2$ et dont $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur.
4) Que représente $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ pour $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$? Il n'est pas demandé de représenter $\mathcal{D}$ par des équations.
5) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_3$ contenant $\mathcal{D}_1$ et perpendiculaire au plan
$\mathcal{Q}$ d'équation $3x-3y-2z+4=0$ (plan intervenant dans les équations de $\mathcal{D}_1$).
6) Déterminer la distance du point $A(1,1,1)$ à la droite $\mathcal{D}_1$.

exercice 2

On définit la fonction f par $f(x)=0$ si $x=0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) f est-elle dérivable en 0 ?
3) Dresser le tableau de variations de f.
On y fera apparaitre les différentes limites et la valeur de $f(e)$) .
4)Etude de la fonction g telle que $g(x) = \frac{x^2-1}{x\ln(x)}$.
5) On admet que, sur $D \setminus \{0\}$, $g'(x) = \frac{1+x^2}{x^2\ln^2(x)}h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Etudier les variations de g.
6) Déterminer la limite de g en 1.

Exercice 3

Montrer l'équivalence entre les deux systèmes d'équations, où $a \neq b$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cosh x + \cosh y & = & a \\ \sinh x + \sinh y & = & b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} e^x + e^y & = & a+b \\ e^x\, e^y & = & \frac{a+b}{a-b} \end{array} \right.$$

Résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cosh x + \cosh y & = & \frac{9}{4} \\ \sinh x + \sinh y & = & \frac{3}{4} \end{array} \right.$$