DEVOIR SURVEILLE 3

Exercice 1

On considère la courbe Γ définie par la représentation paramétrique :

$$x(t) = \frac{t^2+1}{2t} \ , \ y(t) = \frac{2t-1}{t^2}$$

dans le repère orthonormé $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
1) Etudier les variations de x et y et préciser les résultats dans un tableau. Donner les limites en l'infini et en 0.
2) Déterminer l'équation de la tangente (T) à Γ pour $t = 1$. Etudier le signe de $y(t) + 2x(t) - 3$ au voisinage de 1. Quel résultat obtient on par cette étude ?
3) Montrer que $(y(t) + 4x^2(t) - 4x(t) - 2 = t^2 - 2t$. En déduire que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -4x^2 + 4x + 2$ est asymptote à Γ quand t tend vers 0 (c'est à dire que la distance de Γ à $\mathcal{P}$ tend vers 0 quand t tend vers 0). Etudier les positions respectives de $\mathcal{P}$ et de Γ au voisinage de $t = 0$.

Exercice 2

Déterminer les éléments caractéristiques de la conique d'équation :

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 - 4x - 6y = 0$$

dans un repère orthonormé.

Problème Mines sup 2004. Partiel.

Partie I. Résolution d'équations différentielles.
1) Résoudre l'équation différentielle $z' + z\tanh t = 0$ où z est une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles. On vérifiera que $t \to \ln(\cosh t)$ est une primitive de la fonction $t \to \tanh t$
Déterminer la solution $z1$ de cette équation telle que $z1(0) = 1$.
2) Résoudre l'équation différentielle $z' + z\tanh t = t\tanh t$. On vérifiera qu'une primitive de $t \to t\sinh t$ est la fonction $t \to t\cosh t - \sinh t$.
Déterminer la solution $z2$ de cette équation telle que $z2(0) = 0$.

Partie II. Etude d'un arc paramétré.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe (Γ) représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) &= t - \tanh t \\ y(t) &= \dfrac{1}{\cosh t} \end{cases}$$

3) Démontrer que (Γ) admet un axe de symétrie.
4) Etudier les variations de x et y, regrouper les résultats dans un tableau. On admettra sans démonstration que la tangente au point stationnaire est parallèle à l'axe des ordonnées.
5) Etudier les branches infinies de (Γ).
6) a) Calculer $\cosh t$ et $\tanh t$ lorsque $\sinh t = 1$. Rappel : $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Calculer la valeur de t correspondante, sous forme d'un logarithme népérien.
b) Déterminer le point B de (Γ) où la tangente a pour coefficient directeur -1. Rappel : Si un vecteur $\overrightarrow{V}$ a pour coordonnées (a, b) avec $a \neq 0$, le coefficient directeur d'une droite dont $\overrightarrow{V}$ est vecteur directeur est $\dfrac{b}{a}$.
7) Donner l'allure de la courbe (Γ).
8) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (Γ) au point M de paramètre t.
b) Cette tangente recoupe l'axe des abscisses au point N, calculer la distance MN.