DEVOIR SURVEILLE 4

Exercice 1

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.
2) Déterminer la suite u de $\mathcal{S}$ vérifiant :
$u_0 = 2,\ u_1 = 1$.

Exercice 2

On considère la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 1,\ u_{n+1} = u_n \frac{1+2u_n}{1+3u_n}.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente et déterminer sa limite.
3) Montrer que $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{u_n}{1+2u_n}$, en déduire $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{1+2u_n}$ puis que la suite $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ est convergente. Calculer

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

en déduire un équivalent de u_n. On utilisera sans démonstration :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = l.$$

Exercice 3

On considère la fonction $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{3x-4}{x-1}$ et la suite définie par $u_0 = \dfrac{5}{2},\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \in \mathbb{N}$.
1) Vérifier que f a un point fixe unique $\alpha \in]1, +\infty[$ et que l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ est stable par f.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
3) Vérifier que :$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 2$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.
4) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n. Retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

On note S l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant : $a_0 \in \mathbf{Z}$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n \in \mathbf{N}^*$.
Etant donné une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de S, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$p_0 = a_0\ ,\ p_1 = a_0a_1 + 1\ ,\ q_0 = 1\ ,\ q_1 = a_1$$

puis, pour $n \geq 2$, par :

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $q_n \geq n$.

2) Relations entre les p_n et les q_n.

a) Pour $n \geq 1$, Montrer que $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

b) Pour $n \geq 2$, Montrer que $p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

3) Etude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

a) Pour $n \geq 1$, montrer que $x_n - x_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ et pour $n \geq 2$, montrer que $x_n - x_{n-2} = \dfrac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$.

b) En déduire que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes. La suite (x_n) est elle convergente ?

Soit $\lambda \in \mathbf{N}^*$ un entier naturel non nul fixé ; on considère la fonction f définie pour tout t réel par $f(t) = t^2 - \lambda t - 1$.

4) Etude de la fonction f.

a) Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-1, \lambda + 1]$.

b) On note r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$, les deux racines de f. Déterminer le signe et la partie entière de chacune des racines.

5) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on prend $a_n = \lambda$ et on considère la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

a)Pour $i \in [\![0, 3]\!]$, calculer p_i et q_i.

b) Pour $n \geq 1$, exprimer q_n en fonction des p_k pour $k \in \mathbf{N}$. En déduire une expression de x_n en fonction des q_k pour $k \in \mathbf{N}$.

c) Exprimer q_n en fonction de r_1, r_2 et n.

6) Déduire des questions précédentes une expression de x_n en fonction de r_1, r_2 et n.

7) En déduire la valeur de la limite α de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de r_1 et r_2.

8)On prend $\lambda = 3$. Calculer q_n pour $n \in [\![0, 6]\!]$. En déduire deux nombres rationnels qui encadrent α à 10^{-4} près.