**DEVOIR SURVEILLE 5**

# Exercice 1

Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$. On veut montrer le résultat suivant :

$$\exists c \in ]a,b[ \text{ tel que } \frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

1) On définit la fonction $g$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)+f(a)}{2} - f\left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{A}{8}(x-a)^2$$

où $A$ est choisi tel que $g(b)=0$.
Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe $d \in ]a,b[$ tel que $g'(d)=0$.
2) Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à $f'$, qu'il existe $c \in ]a,d[$ tel que $A = f''(c)$.
Conclure.

# Exercice 2

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
1) Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable (de classe $C^\infty$) sur $]0,+\infty[$.
2) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, $x \in ]0,+\infty[$. Montrer que $f'(x)$ peut être mis sous la forme $\dfrac{T_1(x)}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ et $f''(x)$ sous la forme $\dfrac{T_2(x)}{x^2(1+x)^2} + 2\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$ où $T_1$ et $T_2$ sont des polynômes (ou des constantes) à préciser.

3) Montrer que pour tout entier naturel $n$, il existe un polynôme $T_n$ à coefficients réels et un réel $a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{x^n(1+x)^n} + \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$

4) Montrer que tous les coefficients de $T_n$ sont des entiers.
5) En utilisant la formule de Leibniz, calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de $T_n$, sans chercher à expliciter les coefficients du polynôme. Vérifier cette expression pour $n=2$.

6) Soient $u, v : I = ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et dérivables sur $I$ et vérifiant $u(0)=v(0)=0$ et $\forall x \in I,\ x \neq 0,\ v(x) \neq 0$.
On considère $b \in I,\ b \neq 0$ et on définit une fonction $h$ sur $I$ par : $h(x) = u(x) - \dfrac{u(b)}{v(b)} v(x)$. Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, l'existence de $c \in I$ strictement compris entre 0 et $b$, tel que $u(b)v'(c) = v(b)u'(c)$. En déduire que

$$\lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = l.$$

7) Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

en déduire que $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ puis que $f \in C^1(]0,+\infty[)$.

## Problème. Mines sup 2007. Epreuve spécifque MPSI.

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0,\ f(0) = 0.$$

1) Etudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de $f$ en 0.

2) Etudier les limites et variations de $f$ (à résumer dans un tableau), préciser les branches infinies.

3) Etudier la convexité, préciser les points d'inflexion éventuels.

4) Tracer la courbe représentative, $(\mathcal{C})$ de cette fonction dans un repère orthonormal. On pourra utiliser $e^{-2} \approx 0,135,\ e^{-1} \approx 0,36,\ e \approx 2,72$.

5) Soit $h \in ]0,1[$, déterminer l'aire $\mathcal{A}(h)$ de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = h$ et $x = 1$.

6) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées, c'est à dire $\lim_{h\to 0} \mathcal{A}(h)$.

7) Résoudre l'équation différentielle $(E):\ x^2\, y' + (2x-1)y = 0$ sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.

8) Cette équation $(E)$ a t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ ? Si oui les préciser.

9) Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

10) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ tel que :

$$\forall x \in ]0,+\infty[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\, e^{-\frac{1}{x}} \text{ et que}$$

$$(1)\ P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - 2(n+1)x)\, P_n(x).$$

11) Calculer $P_0, P_1, P_2, P_3$ et $P_4$.

12) Calculer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de $P_n$.

13) On considère la fonction $g$ telle que $g(x) = x^2 f(x)$.
Montrer que $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.

14) Rappeler la formule de Leibniz relative à la dérivée n-ième d'un produit de fonctions en indiquant les hypothéses.

15) En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n)}(x)$, montrer que :

$$(2)\ P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x)\, P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x).$$

16) En déduire que (3) $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.

17) Déduire de (1) que : (4) $x^2 P_n''(x) + (1-2nx)P_n'(x) + n(n+1)P_n(x)$.