DEVOIR SURVEILLE 6

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :
a) la famille $(Id_E,\ f)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.
b) $f^2 = 3f - 2Id_E$.
1) On note $A = \text{Vect}(Id_E,\ f)$. Pourquoi $(Id_E,\ f)$ est elle une base de A ? Montrer que A est un sous anneau de $\mathcal{L}(E)$.
2) Soient λ et $\mu, \mu \neq 0$ deux réels. Montrer que $\lambda Id_E + \mu f$ est un projecteur de E si et seulement si (λ, μ) est l'un des couples $(-1, 1)$ ou $(2, -1)$.
On pose $p = f - Id_E$ et $q = -f + 2Id_E$. Il a été démontré ci-dessus que p et q sont deux projecteurs de E.
3) a) Calculer $p + q$, $p \circ q$ et $q \circ p$, ainsi que $(p + q)^2$ et $(p + q)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire que $\ker p = \text{im } q$ et que $\ker q = \text{im } p$ et que $\ker p$ et $\ker q$ sont supplémentaires dans E.
4) a) Montrer que (p, q) est une base de A et déterminer les coordonnées de Id_E et de f dans cette base.
b) Déterminer les coordonnées de f^n, $n \in \mathbb{N}$ dans cette base.
c) En déduire les coordonnées de f^n, $n \in \mathbb{N}$ dans la base $(Id_E,\ f)$.
5) a) Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de Id_E et de f.
b) Montrer que la formule obtenue dans 4) c) reste valable pour les coordonnées de f^{-n}, $n \in \mathbb{N}$ dans la base $(Id_E,\ f)$.

Exercice 2

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On pourra identifier polynôme et fonction polynôme. Un polynôme est unitaire quand il est non nul et que son coefficient dominant est 1. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & Q \end{array} \right.$$

où $Q(X) = (3X + 8)P(X) + (X^2 - 5X)P'(X) + (X^2 - X^3)P''(X)$.
1) a) Vérifier que f est linéaire.
On note $u_i(X) = X^i$, $i \in \mathbb{N}$.
b) Calculer $f(u_0)$, $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$.
2) Donner le degré de $f(P)$ en fonction du degré de P. On examinera en particulier le cas où P est de degré 3. On pourra remarquer, en le justifiant, que l'on peut se restreindre à des polynômes P unitaires.
3) a) f est-elle surjective ?
b) Montrer que $\ker f \subset \mathbb{R}_3[X]$, déterminer ce noyau et montrer que c'est une droite vectorielle engendrée par le polynôme $X \mapsto X^3 + \dfrac{X^2}{3}$.

Problème. Mines sup 1999

On note $p : x \mapsto e^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$. On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

La partie IV est indépendante des autres parties.

Première partie

On se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$, au moyen de diverses méthodes. De par la définition de $\mathcal{E}$, il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre ; soit donc a, b et c trois réels tels que $ap + bq + cr = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne la fonction nulle).

1) L'étudiant Antoine a évalué l'expression $(ap+bq+cr)(x)$ pour $x=0$, $x=1$ et $x=2$. Suivez sa démarche en l'expliquant, et concluez.

2) Antoine a utilisé une propriété du nombre e ; laquelle ? Sauriez-vous justifier cette propriété autrement que par un argument du genre ≪ *tout le monde sait bien que* $e \approx 2.71828$?

3) L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p, q, r au voisinage de $+\infty$. Reconstituez sa méthode et concluez.

4) Au fait : quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\big(f(0), f'(0), f(1)\big)$.

5) Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

6) Soit $f = ap+bq+cr$ un élément de $\mathcal{E}$. Exprimez a, b et c en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$.

Deuxième partie

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = Ap+Bq+Cr$ où

$$\begin{cases} A &= \dfrac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \dfrac{2}{e(e-1)} f(1) \\ B &= -\dfrac{1}{e-1} f(0) - \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \\ C &= \dfrac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}$$

7) On note θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\theta(a,b,c) = (a,b,-c)$. Montrez que $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. En déduire que φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

8) Exprimez $\varphi(p)$, $\varphi(q)$ et $\varphi(r)$ en fonction de p, q et r.

9) Déterminez $\varphi \circ \varphi$. Que pouvez-vous dire de φ ?

Troisième partie

10) On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par f. Montrez que $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}$. En déduire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; déterminer une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$. (Montrer que $f = ap+bq+cr \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a+be+c=0$) ; prouver que $\mathcal{P}$ est de dimension deux ; exhibez une base (e_1, e_2) de $\mathcal{P}$.

11) On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par f. Montrez que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; prouvez que $\mathcal{D}$ est de dimension un, et déterminez des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer une base (e_3) de $\mathcal{D}$, et donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.

12) Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.

13) Justifiez l'affirmation suivante : $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

14) Caractérisez géométriquement φ.

Quatrième partie

On se propose de développer ici l'idée suivie par l'étudiant Luc dans la première partie (question **4**). On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul ; pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

15) Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Quelle est la dimension de $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$?

16) Soit $(P_k)_{1 \le k \le q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :

pour $1 \le k < q$, $P_{k+1}(x) - P_k(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

On note $f_k = \exp \circ P_k$ l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp\big(P_k(x)\big)$. Montrez que la famille $(f_k)_{1 \le k \le q}$ est libre.