DEVOIR SURVEILLE 7

Exercice 1

1) Vérifier que :

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1},\ x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2} dx.$$

Exercice 2

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx$$

à l'aide d'un changement de variable transformant les bornes de l'intégrale en 0 et 1.

Exercice 3

1) Calculer

$$\int_a^b \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx\ ,\ 0 < a < b < 1$$

par une intégration par parties.

Remarque : Vérifier que $x \to \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ est une primitive de $x \to \frac{1}{1-x^2}$ sur $]0,1[$.

2)Déduire de la question précédente

$$\lim_{a\to 0,\, b\to 1} \int_a^b \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx.$$

Problème

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I.

PARTIE I

1) On définit la fonction ϕ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\phi(0) = 0$.

a)i) Donner le développement limité de ϕ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

ii) En déduire que ϕ est continue et dérivable en 0. Préciser $\phi'(0)$.

b) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\psi(t) = \frac{t}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\psi(0) = 1$. Montrer que ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.

2) Soient a et b réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\, dt \quad \text{tend vers 0 lorsque } \lambda \text{ tend vers } +\infty$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit S_n sur $[0, \pi]$ par : $S_n(t) = 1 + 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2kt)$.

a)i) Montrer, *sans récurrence*, que :

$$\forall t \in \left]0, \pi\right[, \quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}, \text{ (Rappel : } \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))).$$

ii) Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

b) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt$.

PARTIE II

1)a) Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin(2n+1)t\, dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2)a)i) Vérifier que la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

ii) Comparer $F\big((2n+1)\frac{\pi}{2}\big)$ et I_n.

b)i) Soit x réel, $x \geq \frac{\pi}{2}$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x) tel que : $(2n+1)\frac{\pi}{2} \leq x < (2n+3)\frac{\pi}{2}$. On note $\alpha(x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

ii) Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

c) En déduire que $F(x)$ admet une limite ℓ si x tend vers $+\infty$. Préciser ℓ.

3)a) Soient x et y réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que : $\left|\displaystyle\int_x^{y} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \leq \dfrac{2}{x}$. (On effectuera une intégration par parties).

b) En déduire que : $\forall x > 0, \left|\ell - F(x)\right| \leq \frac{2}{x}$.

PARTIE III

1)a) Déterminer deux réels α et β, indépendants de n, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}$. ($\alpha$ et β sont désormais ainsi fixés).

b) En déduire que $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) S_n\!\left(\frac{t}{2}\right) dt$ est un réel indépendant de n, que l'on précisera.

c) On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par : $h(t) = \dfrac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin(\frac{t}{2})}$. Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

2) On définit les suites $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $(n \geq 1)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ $(n \geq 0)$.

a) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.