DEVOIR SURVEILLE 8

Exercice 1

On définit pour $n \in \mathbb{N}$, les polynômes à coefficients réels suivants :

$$P_0 = 1,\ P_n = (X+1)^n(X-1)^n,\ L_n = P_n^{(n)}.$$

Les polynômes L_n sont appelés polynômes de Legendre.
1) Déterminer L_0, L_1 et L_2.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme L_n est de degré n. Quel est son coefficient dominant ?
3) Comparer les polynômes $L_n(-X)$ et $L_n(X)$.
4) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, \cdots n-1\}$ les valeurs $P_n^{(k)}(-1)$ et $P_n^{(k)}(1)$.
5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme L_n est scindé, que toutes ses racines sont distinctes et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.
6) En utilisant la formule de Leibniz, expliciter le polynôme L_n, $n \in \mathbb{N}$, sous forme d'une somme de polynômes dans laquelle on fera apparaitre des coefficients binomiaux. En déduire les valeurs $L_n(-1)$ et $L_n(1)$.
7) Vérifier les égalités

$$(1)\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n$$

$$(2)\ \ P''_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1}.$$

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,. En dérivant n fois la relation (1) et $n-1$ fois la relation (2), déterminer une relation simple entre L_{n+1}, L_n et L_{n-1}.
9) En appliquant la formule du binôme au polynôme $P_n = (X^2-1)^n$, puis en dérivant n fois la formule obtenue, déterminer la décomposition du polynôme L_n sur la base canonique, en exprimant les coordonnées à l'aide de coefficients binomiaux.

Exercice 2

1) Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\dfrac{\sin((2n+1)a)}{\sin^{2n+1} a}$ sous la forme d'un polynôme en cotan $a = \dfrac{1}{\tan a}$.
On montrera que

$$a)\ \sin\left((2n+1)x\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} (\sin x)^{2k+1} \left(\cos x\right)^{2(n-k)}.$$

$$b)\ \frac{\sin((2n+1)a)}{\sin^{2n+1} a} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \left(\text{cotan a}\right)^{2(n-k)}.$$

2) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les racines du polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} X^{n-k}.$$

3) Calculer la somme des racines du polynôme P.
4) Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on rappelle que $\sin\theta < \theta < \tan\theta$. En déduire que $\text{cotan}^2\,\theta < \dfrac{1}{\theta^2} < 1 + \text{cotan}^2\,\theta$.
On définit la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

5) Montrer que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Problème. Concours ESSEC 1995. Partie I

Dans tout le problème, et pour tout polynôme P à coefficients réels, on note $M(P)$ le maximum de la fonction $x \to |P(x)|$ sur le segment $[-1,+1]$.

On se propose alors de majorer pour tout entier naturel k le maximum $M(P^{(k)})$ (où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{ième}$ de P) en fonction du maximum $M(P)$.

Partie I

On se propose d'étudier, dans cette partie, la suite de polynômes définies par récurrence pour tout nombre réel x par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, puis pour $n \geq 1$ par :

$$(1) \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

1) Étude des polynômes T_n.

a)Calculer $T_n(x)$ pour $n \leq 4$.

b) Établir que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme à coefficients entiers de degré n tel que, pour tout nombre réel x : $\quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

c) Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.

d) Dans la base canonique $(X^n, ..., X, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, on note T_n sous la forme :

$$T_n(X) = \lambda_n[X^n + b_n X^{n-2} + c_n X^{n-4} + \cdots].$$

Calculer le coefficient dominant λ_n du polynôme T_n. À l'aide de la relation (1), exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et calculer b_n en fonction de n pour $n \geq 2$.

2) Étude de la fonction T_n sur $]1, +\infty[$ pour $n \geq 1$.

a) On considère la fonction définie pour u appartenant à $]1, \infty[$ par :

$$u \longrightarrow x = \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u}).$$

Établir qu'elle réalise une bijection de $]1, \infty[$ dans $]1, +\infty[$, puis montrer que :

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(u^n + \frac{1}{u^n}).$$

b) En déduire pour $x > 1$ que $T_n(x) > 1$, et montrer, par récurrence, pour $x \geq 1$ l'inégalité :

$$T_n(x) \leq 2^{n-1}x^n.$$

3) Étude de la fonction T_n sur $[-1, 1]$ pour $n \geq 1$.

a) À l'aide de la relation (1), établir pour tout nombre réel θ l'égalité :

$$(2) \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

En déduire le maximum $M(T_n)$.

b) Pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, on pose $a_k = \cos\frac{(n-k)\pi}{n}$.

On remarquera que $-1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = +1$.

Calculer $T_n(a_k)$ pour $0 \leq k \leq n$, puis prouver que, si x désigne un nombre réel, l'égalité $|T_n(x)| = M(T_n)$ a lieu si et seulement si x appartient à l'ensemble $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$.

4) Équation différentielle vérifiée par T_n pour $n \geq 1$.

a)En dérivant la relation (2), exprimer $T_n'(\cos\theta)$ en fonction de $\theta \quad (0 < \theta < \pi)$. En déduire pour $n \geq 2$, la valeur de $T_n'(a_k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Était-ce prévisible ?

A l'aide d'un passage à la limite, déterminer enfin $T_n'(1)$ et $T_n'(-1)$.

b) En dérivant deux fois la relation (2), établir pour tout nombre réel x de $[-1, +1]$:

$$(3) \qquad (x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) - n^2 T_n(x) = 0.$$

Prouver que cette relation reste valable pour tout nombre réel x.

c) Soit j un entier tel que $0 \leq j \leq n-1$. En dérivant j fois la relation (3), établir que :

$$T_n^{(j+1)}(1) = \frac{n^2 - j^2}{2j+1} T_n^{(j)}(1).$$

d) En déduire en fonction de n le nombre réel μ_n tel que, pour $1 \leq j \leq n$:

$$T_n^{(j)}(1) = \mu_n . 2^{j-1} \frac{(j-1)!\,(n+j-1)!}{(2j-1)!\,(n-j)!}.$$