DEVOIR SURVEILLE 9

Exercice

On considère la matrice à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$, en déduire A^2 en fonction de A et de I_3.
2) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists (a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $A^k = a_k A + b_k I_3$. Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k.
3) Calculer a_k et b_k en fonction de k.
4) Ecrire A^5 en fonction de A et I_3.

Problème 1. Mines MPSI 2004. Problème II

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

I- Etude de structures

1) a) Montrer que E muni de l'addition des matrices et de leur produit par un scalaire réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b) Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.
2) a) Montrer que E est stable pour la multiplication des matrices.
b) En déduire que E muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau.
c) Cet anneau est il commutatif ?
3) Soit G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0,\ b > 0$. Montrer que G est un groupe multiplicatif.

II- Puissance d'une matrice et suites

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$.
4) On suppose $a \neq b$. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = \begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}.$$

4) On suppose que $a = b$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$. On exprimera les coefficients en fonction de a et c.
5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix} \text{ et } \phi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \text{ avec } A^0 = I_2.$$

a) Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange avec ses hypothèses.
b) Démontrer que, pour x fixé, la suite $(\phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est e^x.
c) On suppose que $a \neq b$. Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, b, c, \phi_n(a)$ et $\phi_n(b)$. Montrer que les suites $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ ont des limites respectives α, β et γ que l'on calculera.
d) On suppose $a = b$. Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, c, \phi_{n-1}(a)$ et $\phi_n(a)$. Montrer que les suites $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ ont des limites respectives α, β et γ que l'on calculera.
6) Pout tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ on pose $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α, β et γ ont été définis à la question 5 et on note f

l'application de E dans E définie par $f(A) = A'$.
a) L'application f est elle linéaire ?
b) L'application $f$est elle injective ?
c) L'application f est elle surjective ?
d) Déterminer l'image de E par f.
7) On suppose maintenant que $0 < a < \ln 2$, $0 < b < \ln 2$. On pose pour $A \in E$

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(f(A) - I)^p = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \text{ et } \psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

a) Calculer a_n, b_n et c_n quand $a \neq b$ puis quand $a = b$ (on pourra utiliser les résultats de la question 4).
b) Montrer que, pour x fixé, la suite $(\psi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(1 + x)$.
c) Dans chacun des cas précédents, montrer que les suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et $(c_n)_n$ ont respectivement pour limites a, b et c.

Problème 2. Mines MPSI 2009. Problème I partiel

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X],\ P \mapsto \frac{1}{2}\left(P(\frac{X}{2}) + P(\frac{X+1}{2})\right) \text{ et } \phi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R},\ P \mapsto P(1).$$

1) Montrer que f et ϕ sont linéaires.
2) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ en indiquant les calculs intermédiaires.
3) L'application f est-elle injective ? surjective ?
4) Déterminer une base de $\ker \phi$. quelle est la dimension de $\ker \phi$?
5) L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on considère la famille $\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
6) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7) Ecrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
8) Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
9) Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
10) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette matrice représente quel endomorphisme dans la base $\mathcal{B}$?
11) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b et c.
12) En déduire que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim_{n\to\infty} \phi\left(f^n(p)\right) = \int_0^1 P(t)dt.$$

13) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

14) En déduire en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim_{n\to\infty} \phi\left(f^n(p)\right) = \int_0^1 P(t)dt.$$